Las ecuaciones de Evans de la teoría del campo unificado

Laurence G. Felker

Capítulo 4

Responsable de la traducción al castellano:

Ing. Alex Hill
ET3M
México

Favor de enviar críticas, sugerencias y comentarios a alexhill@et3m.net

o visitando la página www.et3m.net y dejando allí su comentario.

Gracias.

Capítulo 4 Geometría

"Uno puede simplificar la física hasta cierto grado, pero más allá del mismo se pierde precisión. Del mismo modo, uno puede expresar un poema con palabras, pero se pierde la métrica, la rima y la metáfora.

Paralelamente, uno puede seguir formulando preguntas como qué es la carga eléctrica, etc., pero llega el momento en que ocurre un proceso parecido al de un papel secante, en el cual uno comienza a absorber más profundamente y se da cuenta de cuáles son las preguntas a formular. Sin las matemáticas, esta comprensión siempre será empírica. Es posible que grandes empíricos instintivos, como Faraday, logren el éxito de todas formas, pero ese no es el caso para el común de los mortales."

Myron Evans, 2004

Introducción

La física es geometría. La geometría no sólo describe simplemente a la física. Más bien, uno no puede separar una de la otra. En las ecuaciones de Evans, y tal como lo creía Einstein, toda la física se basa en la geometría.

Las matemáticas incluidas en éste y en el próximo capítulo serán muy difíciles para muchos lectores. Si éste es su caso, lea los capítulos de cualquier manera. Por el momento deje a un lado las partes imposibles. Luego regrese y utilícelas, junto con el Glosario cuando sea necesario.

Las matemáticas son un lenguaje y, hasta cierto punto, es posible aprender a leerlas sin saber necesariamente cómo operarlas. Hay tres formas de enfocar el estudio de la geometría - la matemática, la verbal y la visual. Se recomienda al lector que se concentre en las últimas dos formas tanto como sea necesario. La información aquí incluida tiene el propósito de intentar dar una explicación física a las matemáticas. Sin embargo, la física necesita de las matemáticas para modelar los resultados de los experimentos y para describir los eventos. Uno no puede evitar completamente el uso de las matemáticas. El aprender a leerlas, y a asociar una imagen con ellas les dará significado.

Tomemos una fórmula, J = r x p ¿Posee esto algún significado físico? No. Se trata sólo de una ecuación.¿pero qué sucede si les damos significado a cada una de las letras de la misma? Amarremos un palo a una cuerda y hagámoslo girar a nuestro alrededor. Sea J el momento angular, un vector que describe la tendencia del palo a moverse en una dirección circular. (Las letras en negrita indican que el valor es un vector, que posee dirección). Sea r el radio - es decir, la longitud de la cuerda desde el centro de rotación. Y sea p la masa del palo multiplicada por su velocidad - el momento, **p** = m**v**. Ahora ya tenemos significado:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{ó} \quad \mathbf{J} = \mathbf{r}m\mathbf{v} \qquad (1)$$

Ahora la ecuación posee un significado físico. Hemos dado una definición a cada una de las letras y - más importante aún - la ecuación predice resultados reales. La ecuación es correcta. Después de todo, algunas ecuaciones están equivocadas.

Eigenvalores

Aún cuando se encuentran más allá del alcance de este libro, creemos que las eigenecuaciones, los eigenvalores, y los demás "eigen..." se mencionan a menudo en la obra de Evans. Eigen en este contexto indica que el resultado posee significado físico real. El término "eigen" significa "propio" en idioma alemán.

Por ejemplo, las órbitas del electrón en un átomo sólo pueden adoptar valores enteros según la ecuación $E = nhf$, que es la hipótesis cuántica de Planck. Aún cuando se trata de una simplificación extrema, podemos afirmar que los valores de E que satisfacen este ecuación son valores propios. Toda energía que no puede obtenerse como resultado de la ecuación anterior no es real, y por ende no puede tener realidad física.

Espaciotiempo curvo de Riemann

La geometría de Riemann se desarrolló para permitir cálculos geométricos en espacios curvos de cualquier número de dimensiones. El dibujo en la Figura 4-1 representa una superficie bidimensional similar a una esfera, dentro de un espacio tridimensional. Cuando tratamos con espaciotiempo en cuatro dimensiones, la geometría de Riemann posee los métodos necesarios para hallar distancias, curvas geodésicas, direcciones, áreas y volúmenes. Einstein utilizó la geometría de Riemann en su teoría de la relatividad como el fundamento para la explicación geométrica de la física.

Una suposición de la relatividad general es que el espaciotiempo de nuestro universo es completamente diferenciable en todas partes. Ello significa que en todas partes hay puntos en el espaciotiempo que permiten una identificación completa y continua de una línea curva, áreas o volumen. La cuantización del espaciotiempo implicaría que el espaciotiempo es diferenciable en todas partes hasta alcanzar distancias muy pequeñas, al menos a nivel de la distancia de Planck.

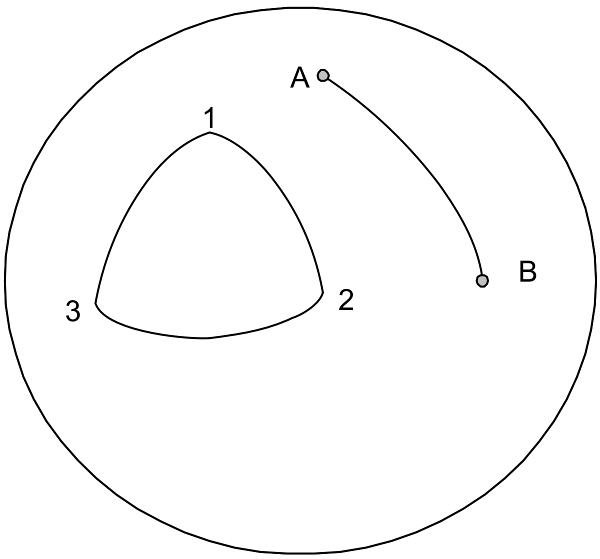
El espacio de Riemann es un espaciotiempo no lineal y de cuatro dimensiones. En cualquier sistema de coordenadas, los vectores pueden definirse para cualquier punto. Los vectores existen en el espacio tangencial ortogonal, que es un espacio matemático que contiene a los vectores. Esos vectores definen la curvatura y nos permiten evaluar los campos gravitacionales y electromagnéticos a medida que el espacio cambia. El espacio vectorial es ortogonal al espacio real, lo cual significa que sería perpendicular si no hubiese curvatura. Véase la Figura 4-1

Hay vectores en cada punto que dan los valores de tensión de compresión debido a masa o a energía, dirección de fuerzas y de campos, gradiente de cambio de estas fuerzas, y la rotación del espaciotiempo en la región.

Existen escalares numéricos en cada punto. La masa es un escalar. No tiene dirección, como lo tiene un vector.

El conjunto de todos estos vectores y números escalares en relatividad se denomina paquete tangente[1]. En teoría cuántica, el conjunto de vectores que describen los eventos se considera como ubicados en el espacio gauge. Evans indica que estos constituyen el mismo espacio; esta es una unificación matemática de las teorías de la relatividad y cuántica.

Figura 4-1 Espacio Curvo



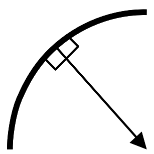
Ya sea la masa o la energía curvan el espacio. En un espacio curvo la distancia más corta entre dos puntos es una curva ya que no existen las líneas rectas.

Se indica la distancia más corta entre los puntos A y B.

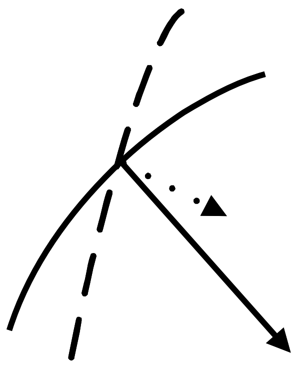
Es una geodésica. Un avión que viaja una gran distancia sobre la Tierra sigue una línea semejante.

El triángulo 1-2-3 no puede dibujarse con líneas rectas. La línea debe de seguir la curvatura del espacio que la contiene. El triángulo no tendrá ángulos que sumen 180 grados en un espacio curvo.

Vectores ortogonales



Perpendiculares a una curva se conocen como "ortogonales" en múltiples dimensiones.



Cuando una superficie curva tiene tres dimensiones, hay dos vectores ortogonales definidos en cada punto.

[1] N. del T.: Tangent bundle, en idioma inglés.

Torsión

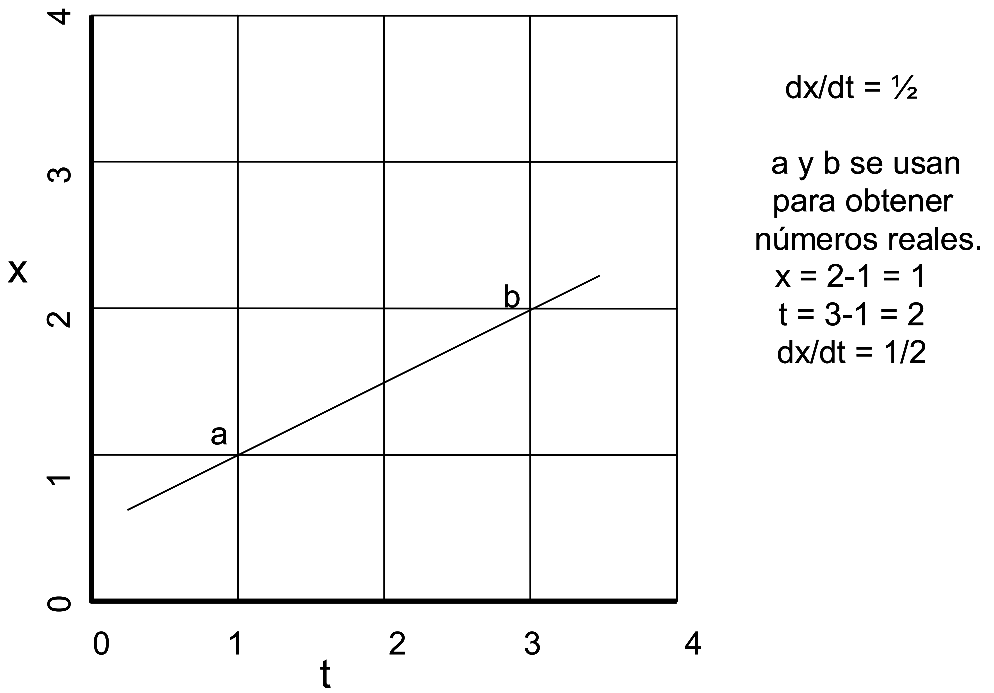
La torsión es el "enrollamiento" de una variedad o manifold - cualquier espaciotiempo como podría ser nuestro universo. A veces se denomina el segundo tipo de curvatura. Riemann es la primera curvatura y es a lo largo de la distancia de una variedad. La torsión es la curvatura de la variedad cuando gira sobre sí misma.

Derivadas

La geometría diferencial es el estudio de las derivadas. Véase la Figura 4-2. La derivada de una ecuación de una curva nos da la pendiente o el ritmo de cambio en un dado punto. Puede que la forma de la curva completa se mueva por todas partes, pero en cualquier punto la velocidad de cambio es específica. El concepto básico de cambio viene dado por dx/dt.

Es decir, el cambio en x, por ejemplo el número de kilómetros recorridos en el automóvil, con respecto al cambio en tiempo, digamos una hora. 100 km en una hora = dx/dt = 100 km/hr. Aún cuando las fórmulas tengan aspecto complicado, la idea básica es siempre simple.

Figura 4-2 La pendiente como una derivada



Si una curva se describe mediante el ecuación $y = a + bx + cx^2$, entonces la primer derivada nos da la pendiente. La aceleración, o el ritmo de cambio del cambio, es la segunda derivada. Si uno está acelerando, entonces la velocidad está aumentando a cierto ritmo. Esto podría indicarse mediante d^2x/dt^2. Esto significa el cambio por segundo cada segundo. La pendiente de la curva de velocidad en cualquier punto es la aceleración.

Un automóvil puede que acelere desde cero hasta 100 km/h en 10 segundos. Sin embargo, el ritmo de incremento no es constante. El cálculo diferencial permite una evaluación más precisa del cambio en cualquier momento. Podemos incluir más detalles si sabemos, por ejemplo, que el ritmo de cambio es menor durante los primeros cuatro segundos y mayor durante los últimos seis segundos.

La existencia de una métrica implica cierta conexión entre los puntos en el espacio. La curvatura puede considerarse como aquella de la métrica. Cuando vamos de un espacio a otro, existen conexiones matemáticas entre ellos. La métrica es un mapa. El mapa podrá doblarse, torcerse, encogerse en una dimensión y estirarse en otra. Las matemáticas nos permiten calcular adecuadamente tales cambios.

∂ , la diferencial parcial.

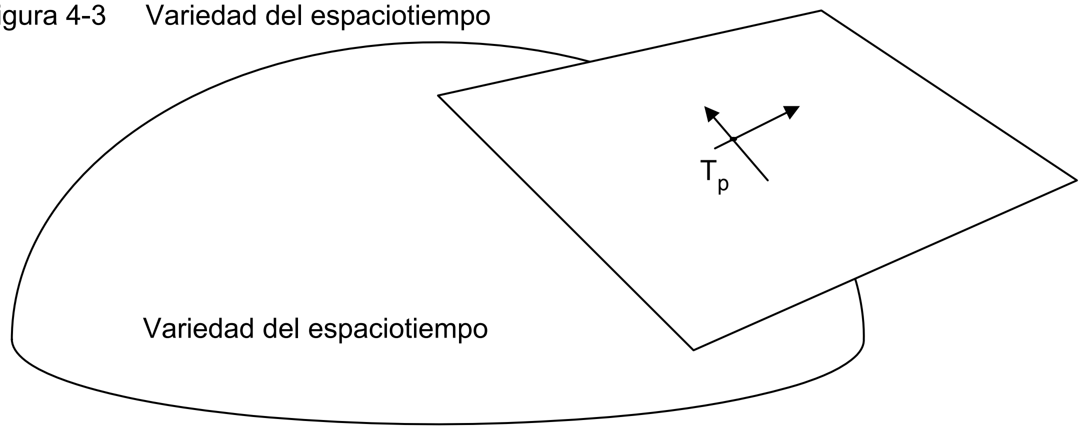
" ∂ " representa "parcial", el símbolo de la diferencial parcial. Cuando existen dos o más variables, uno puede efectuar operaciones sobre ellas cambiando una variable a la vez. Las diferenciales parciales se utilizan donde existen varias variables que cambian simultáneamente.

Esta es una de un número infinito de derivadas parciales posibles:

$$\partial^{\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial Z} \qquad (2)$$

da como resultado un número, ∂^{μ} , luego de algunos cálculos. Podría ser la pendiente de uno de los vectores en la Figura 4-3.

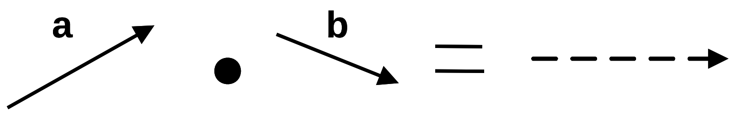
Figura 4-3 Variedad del espaciotiempo



En todo punto en el espacio existe un espacio vectorial, T_p

Figura 4-4 Producto punto

El producto punto o escalar es un escalar, sólo una distancia sin dirección. Puede utilizarse para obtener trabajo y también otros valores.



Vectores

La mayoría de los vectores son flechas. Tienen dirección y un valor numérico. Una fuerza actúa como un vector y se representa mediante un vector. Si uno empuja un objeto, la fuerza que uno ejerce posee una magnitud y una dirección. En cambio, **a • b** es el producto punto. Dados los vectores en la Figura 4-4, este producto se define como el número escalar $|a||b|\cos\theta$. $|a|$ indica el valor absoluto de **a**. Un valor absoluto siempre es positivo.

Producto escalar, o interno

El *producto punto* sólo está definido en tres dimensiones. En cuatro dimensiones se denomina producto escalar o producto interno. Los vectores en relatividad general tienen cuatro dimensiones. Esto se indica mediante $\mathbf{q}^{\mu}$,por ejemplo, donde la letra griega mu indica cuatro dimensiones y puede adoptar letras con números tales como 0, 1, 2 ,3. Si se utiliza una letra latina para el índice, entonces se indican tres dimensiones o parámetros o están implícitos los cuatro índices ortonormales[2] - ct, x, y, z. En cuatro dimensiones se utiliza el término *producto interno*. (Los 4-vectores definen un espacio de cuatro dimensiones, y el producto de dos de ellos se encuentra en el espacio).

Si los vectores son perpendiculares u ortogonales entre ellos, el producto punto o interno es igual a cero. La proyección nos extiende a lo largo del segundo vector debido a que entre líneas perpendiculares sus respectivas proyecciones mutuas sobre el otro es igual a cero.

El producto punto es conmutativo: **x • y = y • x.** Es asociativo: a (**x • y**) = a **y • x** Es distributivo: a • (**x + y**) = a • **y** + a • **x**. Aquí **x** e **y** son vectores y "a" es una constante. El producto punto no está definido para tres o más vectores, y se utiliza entonces el producto interno. El producto punto es invariante bajo rotaciones - es decir el giro del marco de referencia. El punto por lo general no se escribe - se sobreentiende. Si un producto interno se define para cada punto de un espacio en un espacio tangencial, todos los productos internos se denominan métrica de Riemann.

[2] Ortonormal significa ortogonal (perpendicular en lo que se refiera al espacio curvo) y normalizado respecto de los vectores base (los vectores se expresan como múltiplos del vector unitario e).

En cuanto a componentes, uno podría definir dos 4-vectores como a = a_1, a_2, a_3, a_4 y b = b_1, b_2, b_3 y b_4, y el producto punto = $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$. Los cálculos de los componentes generalmente no se escriben. Esta es una distancia pitagórica de cuatro dimensiones en un espacio en donde la métrica no se aplica, ya que no se refiere a nuestro espaciotiempo.

a • b significa | **a** | | **b** | cos θ , y es la versión del producto punto en dos dimensiones. Es el producto punto de dos 4-vectores; esto da como resultado un escalar.

El producto interno de dos tétradas es: $q_{\mu\nu} = q^a{}_\mu q^b{}_\nu \eta_{ab}$. Este es un tensor, la métrica simétrica, $g_{\mu\nu}$, que es la distancia entre dos puntos por eventos en un espacio de Riemann de cuatro dimensiones - el espacio de nuestro universo.

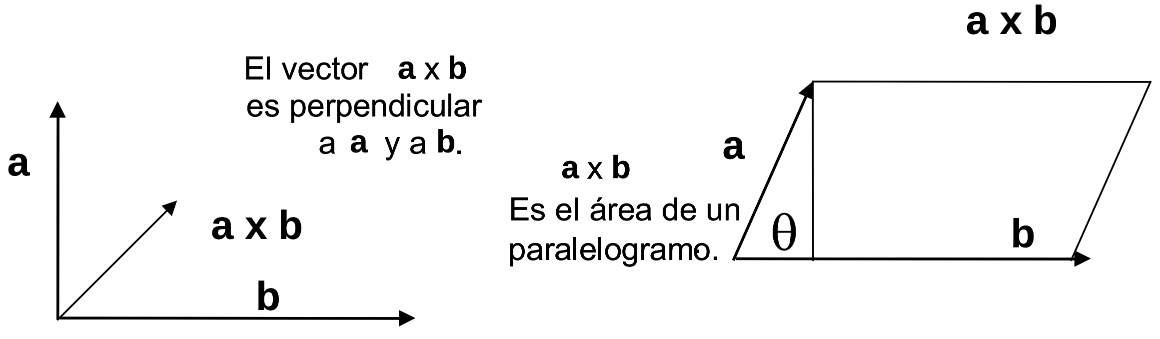
Producto cruz o vectorial

El producto cruz también se denomina producto vectorial. Esta es una clase diferente de multiplicación. El resultado de **a** x **b** es un vector. Puede determinar un área en dos dimensiones. El cálculo del momento de palanca es otro ejemplo. El momento de palanca proporcionado por una llave mecánica es perpendicular al mango y a la fuerza que lo empuja. Si se multiplican tres vectores, el resultado es un volumen en tres dimensiones[3]. Véase la Figura 4-5.

Cuando uno ve productos cruz en 3-vectores, se debe suponer que se establece un vector perpendicular a las tres dimensiones si se utiliza el vector unitario "e". Si no se considera al vector unitario, el producto cruz de vectores de dos dimensiones da como resultado un paralelogramo, y si se utilizan 3-vectores queda definido un paralelepípedo. Véase la Figura 4-6.

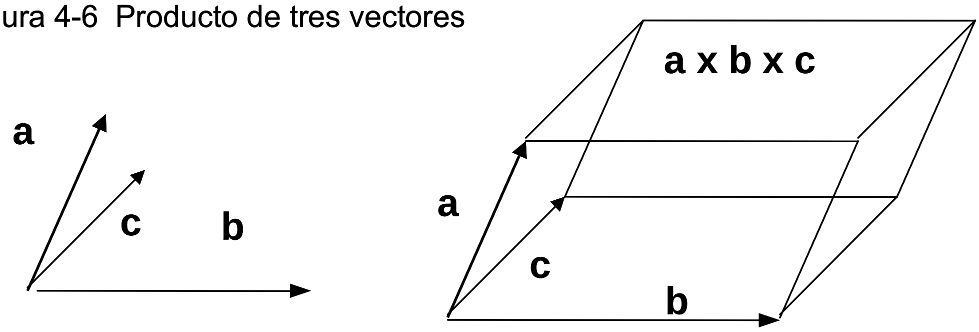
Las fuerzas magnéticas y el momento de palanca de objetos que giran y rotan pueden describirse matemáticamente mediante el empleo de productos cruz.

Figura 4-5 Producto cruz



[3] www.physics.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html posee un buen modelo que permite percibir con claridad el concepto del producto cruz.

Figura 4-6 Producto de tres vectores

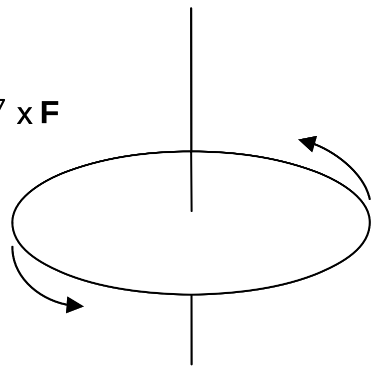


Rotacional

El rotacional de un vector nos dice si el mismo está rotando. Véase la Figura 4-7. Véase también el Vector Gradiente y la Derivada Direccional, ∇ ,más adelante en este capítulo.

Figura 4-7   Rotacional

Rot **F** = ∇ x **F**



Si ei rotacional de una función es 0, entonces ésta no está rotando.

F
es un campo vectorial

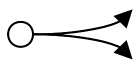
∇

es del, el gradiente

Divergencia

La divergencia de un vector nos dice la cantidad del flujo a través de dicho punto. Véase la Figura 4-8.

Figura 4-8   Divergencia

div **F** = 

La divergencia mide el ritmo de cambio de flujo a través de un punto.

div **F** es un campo escalar

Los vectores se utilizan para hallar propiedades de curvatura, de dirección y de magnitud del espacio físico mismo y de partículas en relatividad general.

Producto cuña

El objeto de las figuras precedentes fue para volver al producto cuña un poco más real para el lector. Hemos visto algunos tipos de productos vectoriales y el significado físico que se les puede asignar.

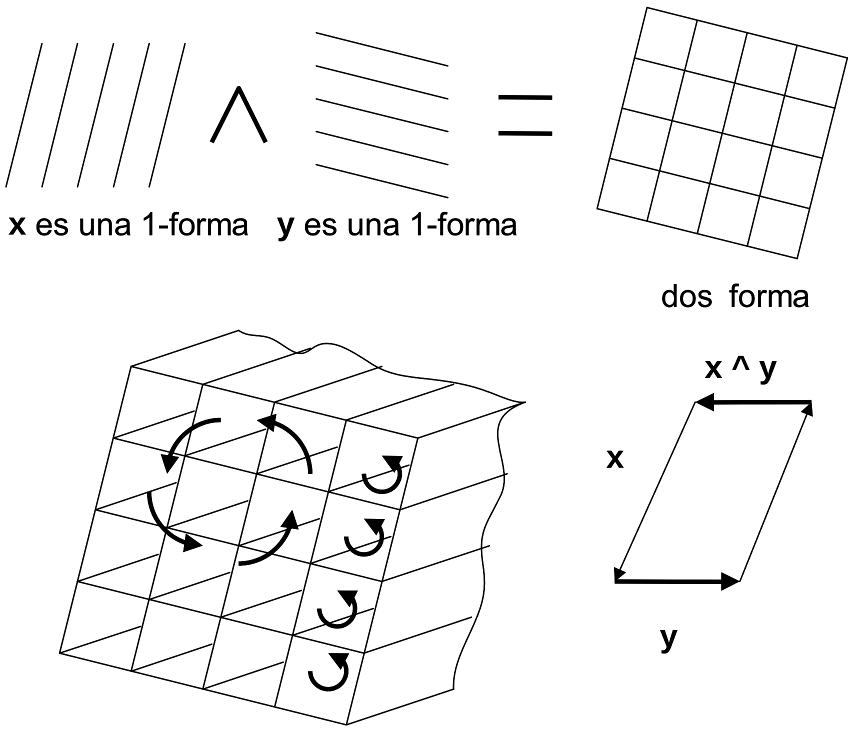
El producto cuña también es un producto vectorial. Es la versión en cuatro dimensiones del producto cruz y puede utilizarse para vectores, tensores o tétradas.

El producto cuña puede utilizarse para calcular volúmenes, determinantes y áreas de la métrica de Riemann. Si dos tensores, vectores o matrices se identifican como A y B, entonces el producto cuña se define como:

$$A \wedge B = [A, B] \qquad (3)$$

donde $A^a{}_\mu \wedge B^b{}_\nu = A^a{}_\mu B^b{}_\nu - A^a{}_\nu B^b{}_\mu$. Cuando uno observa el $\wedge$ (símbolo de cuña), debe uno pensar en las formas de tipo huevera que se ilustran en la Figura 4-9. El producto cuña produce superficies que cortan a los vectores o a las ondas. El resultado es un tipo de forma de huevera como también se muestra en la Figura 4-10.

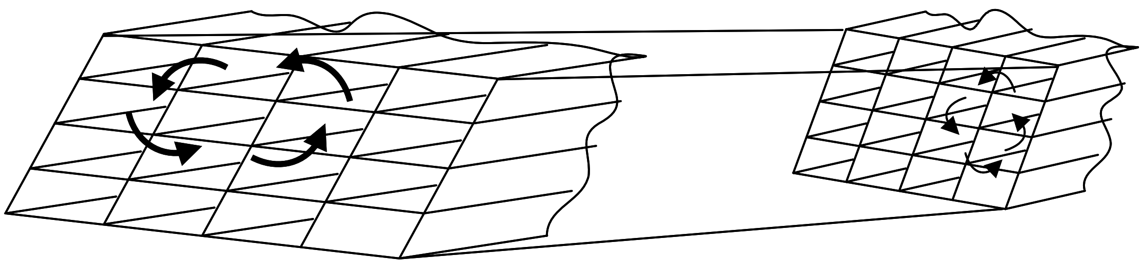
Figura 4-9 Producto cuña



El producto cuña o exterior puede usarse en varias formas. Brinda la circulación o el perímetro de regiones.

El producto cuña es una dos forma.The vectores **x** e **y** son 1-formas.

Figura 4-10   Producto cuña extendido



el producto cuña es una operación antisimétrica denominada la derivada exterior ejecutada en formas diferenciales: $dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$ Las líneas en las figuras también definen, en física, líneas de fuerza electromagnéticas.

Producto externo, tensor o exterior

El producto externo se define para cualquier número de dimensiones. Produce una matriz a partir de vectores fila y columna. Una de las confusiones radica en que los matemáticos y los físicos poseen una terminología ligeramente diferente para las mismas cosas. El álgebra exterior fue inventada por Cartan.

El producto cuña exterior permite operaciones en dimensiones más elevadas.

Por ejemplo, para cuatro dimensiones, el subespacio 1-dimensional de funciones denominadas 0-formas, y el espaciotiempo de cuatro dimensiones de 1-formas, pueden multiplicarse para construir otros espacios dimensionales. Aquí, el álgebra utilizada es cerrada - es decir que los resultados están todos en un subespacio que les pertenece. Esto produce un espacio topológico que es una variedad. Es un subespacio del subespacio siguiente de mayor dimensión.

El operador gradiente es una función similar que puede construir un campo de vectores gradiente.

Escalares, vectores y tensores existen en estos subespacios exteriores algebraicos. La derivada exterior es una regla de diferenciación que transporta un elemento de un espacio de álgebra exterior y de una dimensión inferior, al siguiente subespacio de mayor dimensión. El ejemplo primitivo es el empleo del operador gradiente actuando sobre una función para construir un campo vectorial gradiente.

$$A \wedge B = C \qquad (4)$$

donde C también se denomina un bivector.

A continuación, los subíndices del vector columna son μ, la variedad base. Los subíndices del vector columna son a, el espaciotiempo euclidiano.

Producto Externo

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{\mu} \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}_{a} = \begin{bmatrix} q_0q_0 & q_0q_1 & q_0q_2 & q_0q_3 \\ q_1q_0 & q_1q_1 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_2q_0 & q_2q_1 & q_2q_2 & q_2q_3 \\ q_3q_0 & q_3q_1 & q_3q_2 & q_3q_3 \end{bmatrix}$$

4-vectores y el producto escalar

Cualquier par de 4-vectores puede formar una cantidad invariante de Lorentz. Esto es un producto escalar.

Por ejemplo, $\mathbf{p}^{\mu} = (En/c, \mathbf{p})$ indica el 4-momento de una partícula donde **p** es un vector. Los cuatro componentes se multiplicarían como el producto exterior indicado arriba y luego sumados los valores para hallar el momento. En tres + 1 dimensiones, el momento se define como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ o en relatividad restringida como $\mathbf{p} = \gamma\, m\mathbf{v}$. En relatividad general esto requiere de un poco más de detalle.

$\mathbf{v}^{\mu} = dx^{\mu} / d\tau$ donde $d\tau$ indica el tiempo propio de una partícula. Esta es la 4-velocidad. El tiempo propio es el tiempo tal como se mide desde el marco de referencia de la partícula, no aquel en reposo o a alguna otra velocidad.

En general, las coordenadas y el momento poseen supraindices y las derivadas tienen subíndices. Esto requiere de un tiempo de asimilación y confunde por un tiempo a la mayoría de nosotros.

Tensores

> No debemos permitir que los detalles nos hagan perder de vista el propósito de estas ecuaciones. Debemos mantener claro en nuestra mente que todos ellos calculan la curvatura, la densidad o direcciones del espaciotiempo. Uno puede leer las ecuaciones sin saber cómo operarlas.

Los tensores son ecuaciones o "máquinas matemáticas" para efectuar cálculos en la geometría de la métrica de Riemann. En la mayoría de los casos adoptan la forma " tensor de x e y = xy – yx " o $ds^2 = dx^2 - dt^2$. Una distancia, masa invariante, o un escalar se calcula utilizando un tipo de relación pitagórica.

Todas las operaciones vectoriales mencionadas hasta ahora pueden llevarse a cabo mediante tensores. Los tensores manipulan los vectores, 1-formas y escalares.

Un ejemplo sencillo es g, que es un tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = (\mathbf{u},\mathbf{v}) \qquad (5)$$

es decir, g = una función de (4-vector **u** y 4-vector **v**). Se sobreentiende que el producto tiene aplicada la métrica, $\eta_{\mu\nu}$ = (-1. 1. 1, 1). Da la distancia entre dos eventos en sus componentes. Un evento es un punto en el que el tiempo y la distancia se consideran en forma conjunta; es decir, es un 4-vector. $\eta_{\mu\nu}$ convierte los vectores a vectores métricos en el espaciotiempo real. Esto nos da los componentes. Esto constituye el teorema pitagórico de cuatro dimensiones, con una dimensión del tiempo negativa, y que define las distancias entre eventos en el espaciotiempo.

En un triángulo, $c^2= a^2 + b^2$, donde c es la hipotenusa. Esta relación pitagórica es verdadera para muchos procesos físicos básicos. Combinemos las masas de dos agujeros negros estacionarios que no giran: $M_1^2 + M_2^2 = M_{total}^2$. El total es la suma pitagórica. La masa puede sumarse como una distancia. $E^2= m^2 + p^2$ es otra relación sencilla pero poderosa. La energía es igual a la suma pitagórica de la masa y el momento. En relatividad general, en vez de pensar en distancias, podemos pensar en términos geométricos abstractos.

Esto indica las relaciones geométricas básicas de nuestro mundo físico y equivalencia entre distancia y relaciones masa - energía.

Podemos generalizar el teorema pitagórico a cualquier número de dimensiones; en física, necesitamos 4. Nos referimos al espacio en el que estamos y las distancias entre puntos - o eventos - como "la métrica". La distancia 4-dimensional puede hallarse a partir de $ds^2= dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$. La respuesta debe ser positiva sin duda, ya que se trata de una distancia real. En algunos casos hacemos a dt positivo y a la distancia negativa a fin de asegurar que la respuesta sea positiva.

En la ecuación (5) $g_{\mu\nu}$ es el tensor de la métrica. g es una clase de relación pitagórica de 4 dimensiones, pero es invariante cuando el marco de referencia cambia sus dimensiones - tiempo, velocidad, compresión, ya sea en tamaño o cambio en forma debido a efectos gravitacionales o a la presencia de energía. La longitud al cuadrado entre dos eventos - puntos en los que se incluye al tiempo - se denomina el vector de separación.

$\eta_{\mu\nu}$ se define como una matriz que resulta válida en cualquier marco de referencia de Lorentz.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

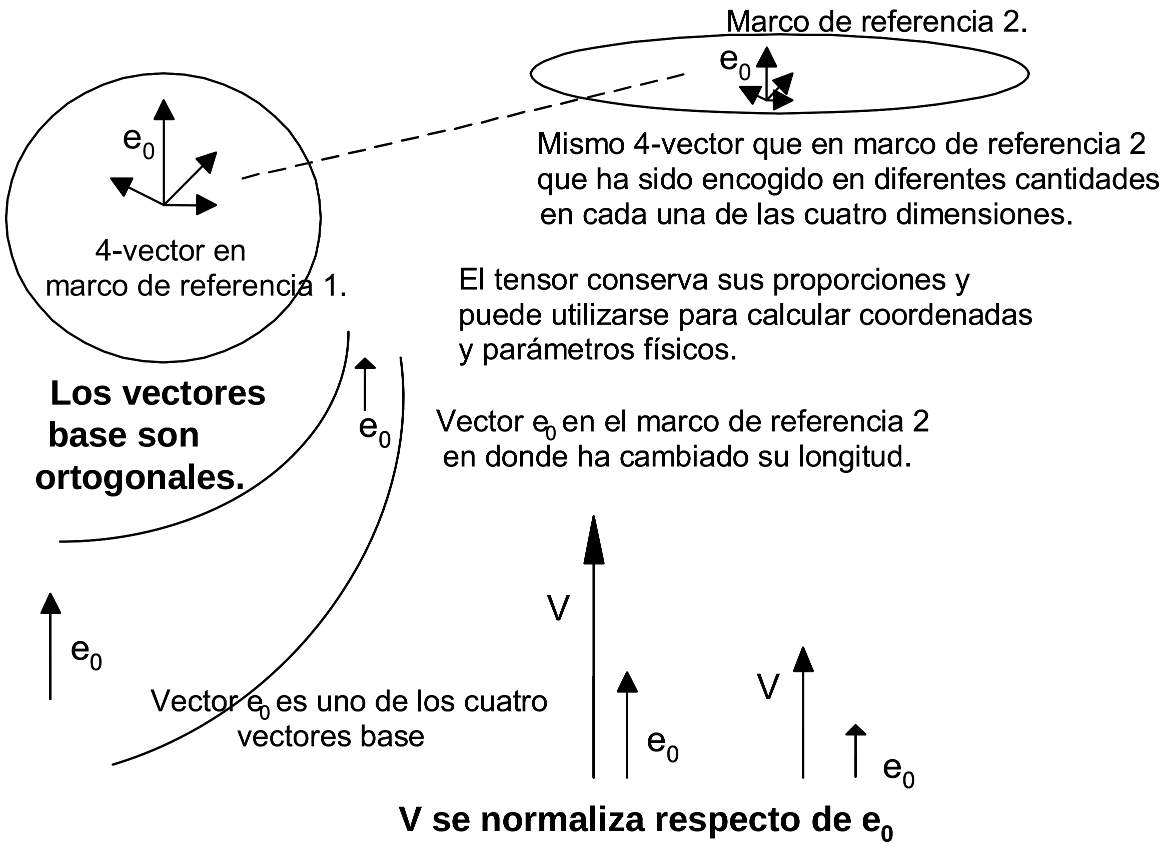
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, \mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{dx}^{\nu} = - dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (6)$$

Algunas veces los signos - y + se invierten. Este es el producto interno. Haciendo a un lado el rigor matemático, se trata de una versión del teorema pitagórico de cuatro dimensiones y nos da una distancia en el espaciotiempo de cuatro dimensiones. El tiempo generalmente es negativo en esta métrica y podría expresarse como $(ct)^2$.

Véase la explicación acerca de colisiones entre partículas en el Glosario para otro ejemplo de invariancia pitagórica.

Las bases de los vectores son como denominadores comunes. Supongamos dos vectores que tienen longitudes respectivas de 2.5 y 4.5. El vector base **e** = .5 y el vector 2.5 pueden expresarse como 5**e**, mientras que el vector 4.5 puede expresarse como 9**e**. Cuando los vectores se mueven a nuevos marcos de referencia altamente aplastados, puede que **e** cambie a, digamos, .03. Pero la relación de 2.5 y 4.5 se conserva. Véase la Figura 4-11

Figura 4-11 Tensores y vectores base



Cada vector base influye sobre la longitud y dirección de los otros. Cuando se mueve de un marco de referencia a otro, todos los demás vectores, V aquí, se calculan a partir de los vectores base.

Otros tensores

g es el tensor métrico descrito anteriormente; nos da distancia.

Riemann es la fundación para geometría curva multidimensional. Puede tomar tres vectores y producir nuevos vectores que dan desviaciones geodésicas o aceleraciones relativas. Esto viene a ser el ritmo de separación de líneas del mundo o geodésicas en un campo gravitacional. $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ es el tensor de Riemann.

Einstein es el tensor definido como G = 8πT . Nos da la curvatura promedio sobre todas las direcciones. R = 8πT es una descripción alterna. R es geometría. El lado izquierdo de la igualdad es matemáticas, en tanto que la derecha es física.

T es el tensor de tensión de energía. Se produce a partir de la densidad de energía por unidad de volumen ocupado. Es T = (,) donde uno o dos vectores pueden insertarse dentro del signo de paréntesis. En el límite del campo débil, T= m/V, es decir masa por unidad de volumen, que constituye simplemente una densidad.

Si se coloca el vector 4-velocidad en uno de los espacios y se deja el otro espacio vacío, entonces el tensor produce la 4-densidad de momento.

Si se coloca el vector 4-velocidad en uno de los espacios y un vector **v** en el otro, entonces el tensor produce la 4-densidad de momento en la dirección del vector **v**.

Puede efectuar otras funciones. Una que veremos es T en el límite de campo débil - densidad de baja energía. En este caso se simplifica a T = m/V = masa / volumen = simple densidad de masa newtoniana.

El tensor de **Ricci** es $R_{\mu\nu}$, y se utiliza para hallar la curvatura escalar; aparece en el tensor de Einstein. (La curvatura escalar es la traza, la suma de los elementos diagonales, de la curvatura de Ricci).

Faraday define las líneas de fuerza eléctrica utilizando el producto cuña de vectores, tal como se describe más arriba. Los resultados pueden representarse de la misma manera en que se mostró para los vectores.

Existen otros tensores utilizados para diversos propósitos.

Todos los tensores son independientes del marco de referencia. Se ajustan a los cambios que se efectúen en las dimensiones espaciales. Es por eso que afirmamos que son invariantes generalizados.

El número total de índices de un tensor nos da su rango. Un tensor de rango 0 es un escalar, un tensor de rango 1 es un vector, y un tensor posee dos o más índices y puede ser de rango-dos, rango-tres, etc.

En este libro, el conocimiento acerca de tensores no es necesario, sin embargo si uno lee las obras de Evans o de Einstein, es necesario por lo menos conocer las generalidades del tema, aún cuando no es necesario saber cómo calcular los resultados.

Álgebra matricial

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$ds^2 = -\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Aquí la matriz simplemente da el signo que debe de colocarse frente a las distancias entre dos eventos.

La matriz incluida más arriba nos muestra el tensor de la métrica $\eta_{\mu\nu}$,

Una matriz es un grupo de funciones, vectores, o números que trabajan juntos con operadores a fin de llevar a cabo un cálculo. Las matrices simplifican los cálculos. Los tensores pueden utilizar matrices y expresarse en términos de una matriz.

Existen muchas reglas que necesitan seguirse, pero los tensores en relatividad pueden describirse como matrices de 4 X 4.

Cualquier matriz asimétrica cuadrada puede descomponerse en dos matrices - simétrica y antisimétrica (" simétrica sesgada" en matemáticas y terminología de Einstein). La matriz simétrica puede descomponerse nuevamente produciendo dos matrices. Tenemos entonces un total de tres partes - la matriz simétrica sin traza, la traza, y la matriz antisimétrica sin traza.

Evans utiliza esto para descomponer la tétrada en sus partes. Estas partes definen la gravitación y el electromagnetismo. Utilizan una función puramente matemática que es bien conocida y la generaliza al proceso físico.

$$q^a_\mu = q^{a\,(S)}_\mu + q^{a\,(A)}_\mu$$

= (simétrica) + (antisimétrica)

= gravitación + electromagnetismo

= curvatura + torsión

= distancia + giro

En algunas operaciones uno debe sumar los elementos individuales de la matriz a fin de hallar un nuevo valor. Algunos elementos en la matriz se cancelarán entre sí debido a que poseen el mismo valor absoluto que otros elementos pero de signo contrario. Algunos elementos serán igual a cero como en el tensor de la métrica de más arriba, donde sólo la diagonal tenía valores no nulos.

Las matrices se utilizan para manipular transformaciones lineales - funciones que obedecen reglas normales de suma y multiplicación. Uno puede multiplicar cada elemento por alguna constante. Uno puede sumar cada elemento de una matriz con cada elemento de otra matriz.

El giro del espaciotiempo puede describirse mediante una matriz que se multiplica por un "generador de rotación". La matriz cambia sus elementos según una fórmula que describe la rotación.

La tétrada, $q^a{}_\mu$

Si tenemos una variedad base, existen dos maneras para seleccionar coordenadas. Podemos elegir un 4-vector en la variedad y estaría relacionado con dicha métrica. O podríamos elegir un 4-vector ortonormal en el espacio índice matemático. Estos dos constituyen el mismo vector, pero descrito en formas diferentes. La tétrada es una forma de relacionar estas dos selecciones. Las tétradas pueden conectar y relacionar las diferentes expresiones del vector en la variedad base y en el espacio índice tangencial.

En otras palabras, la tétrada relaciona a un punto en el universo real con el mismo punto en el espaciotiempo matemático plano de Minkowski.

En la matriz de la tétrada, cada elemento es el producto de dos vectores. Un vector está en la variedad base y uno en el índice. $q^0{}_0$ indica q^0 multiplicado por q_0.

$$q^a{}_\mu = \begin{bmatrix} q_0^0 & q_1^0 & q_2^0 & q_3^0 \\ q_0^1 & q_1^1 & q_2^1 & q_3^1 \\ q_0^2 & q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 \\ q_0^3 & q_1^3 & q_2^3 & q_3^3 \end{bmatrix}$$

Sea V^a el 4-vector en el plano tangente ortonormal y V^μ el correspondiente 4-vector base; entonces:

$$V^a = q^a{}_\mu \, V^\mu \qquad (7)$$

$q^a{}_\mu$ es entonces la matriz de la tétrada. Aquí, a y μ representan a 16 vectores tal como se muestra en la matriz de más arriba. Cada elemento de $q^a{}_\mu$, la tétrada, es $V^a V^\mu$.

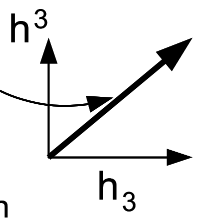
La tétrada es el potencial gravitacional. La forma de Riemann es el campo gravitacional. Con un factor electromagnético de $A^{(0)}$, la tétrada es el potencial electromagnético. La forma de torsión de la geometría diferencial de Cartan es entonces el campo electromagnético.

Formalmente, la tétrada es un conjunto de 16 conectores que definen una base ortonormal.

Cualquier vector puede expresarse como una combinación lineal de vectores base. Uno puede describir vectores de la base anterior en términos de los vectores de la nueva base. Los vectores base no se derivan de ningún sistema de coordenadas. En cada punto en una variedad base se introduce un conjunto de vectores base $\hat{e}_{(a)}$. Poseen un índice en letras latinas para mostrar que no están relacionados con ningún sistema de coordenadas en particular. El conjunto total de estos vectores ortonormales es la tétrada cuando la variedad base es el espaciotiempo de cuatro dimensiones.

$$V^a = q^a_\mu V^\mu$$

$$q^a_{\ \mu} = \begin{bmatrix} q^0_0 & q^0_1 & q^0_2 & q^0_3 \\ q^1_0 & q^1_1 & q^1_2 & q^1_3 \\ q^2_0 & q^2_1 & q^2_2 & q^2_3 \\ q^3_0 & q^3_1 & q^3_2 & q^3_3 \end{bmatrix}$$



En el ejemplo, la conexión q^3_3 se construye a partir de dos vectores: h^3 en el índice y h_3 en la variedad base.

Alternativamente, un conjunto de matrices base tales como las matrices de Pauli pueden utilizarse en lugar de vectores. Esto se utiliza en la teoría de gauge.

La métrica puede expresarse en términos de tétradas:

$$g_{\mu\nu} = e^a_{\ \mu}\, e^b_{\ \nu}\, \eta_{ab} \qquad (8)$$

existe una tétrada diferente para cada punto, de manera que el espacio matemático es muy grande. El conjunto de todas las tétradas es un espacio de tétradas.

El punto esencial aquí es que la geometría diferencial es válida en todos los espaciotiempos - más importante aún, en nuestro universo físico.

El concepto de Cartan de que los valores en el espaciotiempo curvo pueden conectarse y considerarse en el espacio índice plano se conoce también como los "Marcos móviles" o la variación Palatini.

$$\mathbf{q}^{a}_{\mu}$$

q puede definirse en términos de un escalar, un vector, 2- espinotensores de Pauli, o matrices de Pauli o de Dirac. También puede ser una generalización entre una transformación de Lorentz a relatividad general o a una transformación covariante generalizada entre campos gauge.

En geometría diferencial, la tétrada es una conexión entre espacios o variedades. Fue desarrollada por Elie Cartan y constituye un método alterno de geometría diferencial. También se ha denominado el marco ortonormal. Es el tensor de Riemann en una forma diferente de matemáticas. Matemáticamente, se trata de una matriz de conexión, pero Evans muestra que en física puede representar el campo gravitacional.

La tétrada obedece las reglas del cálculo tensorial.

Imaginemos a una persona que proyecta una sombra sobre el suelo. La persona es una variedad, en tanto que la sombra es la otra variedad. Las conexiones son ángulos y líneas que describen el sendero en el que ningún fotón proveniente del sol tocará el suelo directamente. La tétrada describiría dichas conexiones.

Describe los ángulos que conectan el espaciotiempo a varios otros procesos que describen las cuatro fuerzas. Provee las conexiones. Estas conexiones pueden ser bastante complicadas.

La tétrada mezcla dos campos vectoriales, endereza o absorbe las no-linealidades, y las relaciona adecuadamente entre sí.

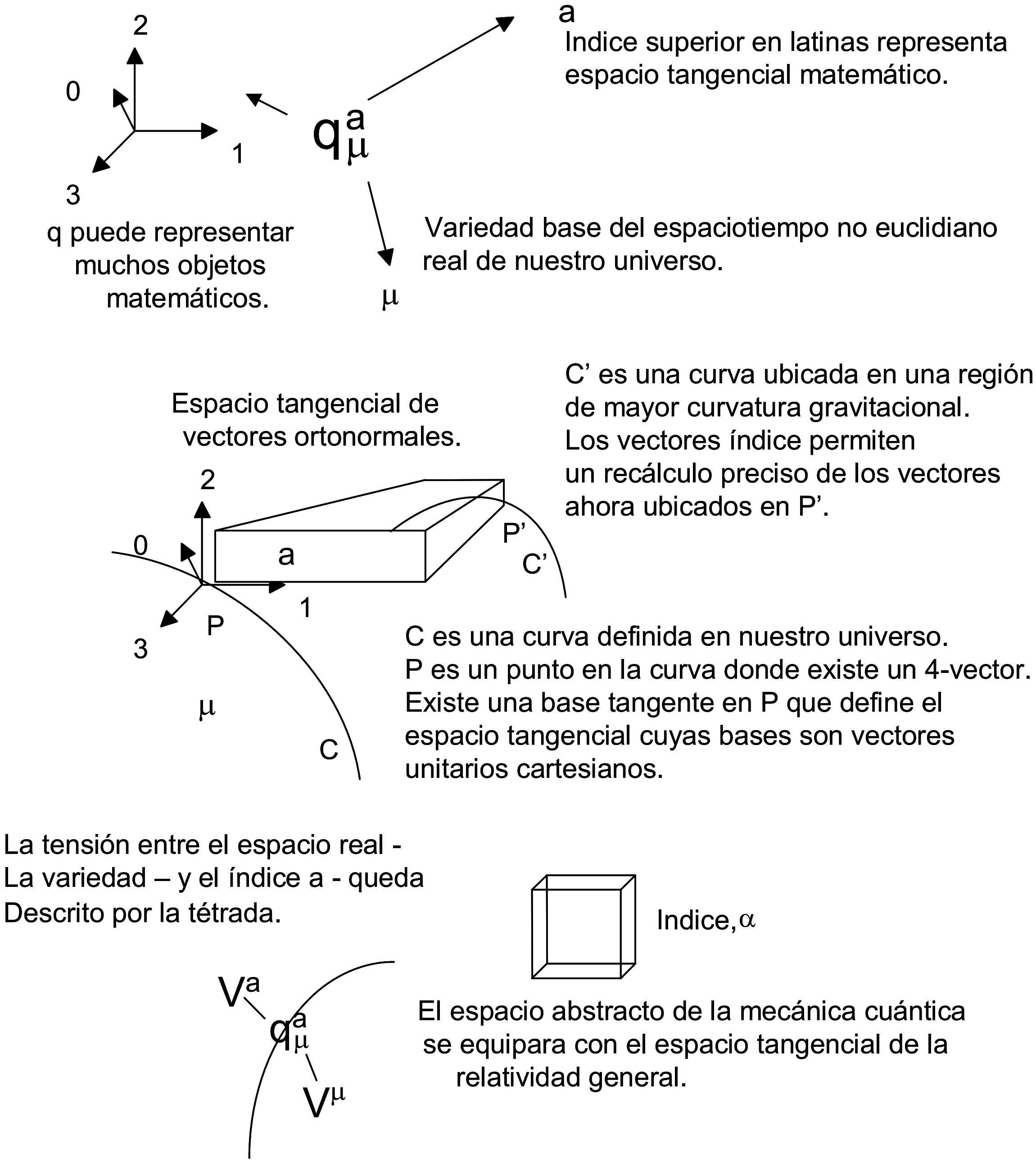
En q^{a}_{μ} , la q puede representar espinotensores, matrices, gravitación, fuerzas nucleares fuertes de quark, electromagnetismo o la fuerza nuclear débil. La letra a representa los índices de la *variedad índice* tangencial. La letra μ es el índice de la variedad de base, que es el espaciotiempo del universo que puede considerarse como el vacío. El espacio tangencial a una variedad se conecta mediante un "paquete". Ese paquete es un grupo de ecuaciones que definen las relaciones. La tétrada demuestra que el fibrado abstracto de la teoría gauge en mecánica cuántica es equivalente al espacio tangencial de la relatividad general.

Existen algunos problemas que se resuelven mediante el uso de la tétrada:

1) el campo gravitacional en el modelo establecido es espaciotiempo curvo, mientras que los otros tres campos (electromagnético, fuerte y débil) son entidades en el espaciotiempo plano. La tétrada puede representar a ambos.

2) el campo electromagnético en el modelo establecido es abeliano. Campos en rotación son no abelianos, y el campo electromagnético abeliano del modelo establecido no puede ser covariante generalizado. La tétrada pueden girarse y luego representar el campo electromagnético.

Figura 4-12



Estas características representan barreras para la unión de las cuatro fuerzas. Debemos cuantizar la gravitación y hallar una forma para describir simultáneamente los campos electromagnético, débil y fuerte en forma conjunta con la gravitación. Las ecuaciones de Evans resuelven estos dos problemas al expresar los cuatro campos como entidades en el espaciotiempo curvo dentro de una estructura no abeliana.

Las matemáticas de la tétrada nos muestran que los métodos de geometría diferencial bien conocidos nos conducen a la aparición de la teoría cuántica a partir de la relatividad general

En geometría diferencial, la tétrada es válida sin que importe si la variedad posee o no torsión - las conexiones electromagnéticas. Esta es una característica distintiva respecto del trabajo de Einstein. Este utilizaba tensores a fin de obtener la invariancia en los espacios. Evans utiliza vectores y geometría diferencial equivalentes a los tensores. Einstein y otros utilizaron tensores que representaban al espín y los colocaron encima de la curvatura. Esto no funcionó. Evans, siguiendo el camino de Cartan y de Einstein en una forma nueva, hace girar al espaciotiempo mismo. La tétrada con electrodinámica O(3), que cubriremos en capítulos posteriores, permite que el espaciotiempo gire.

Nada de lo desarrollado por Einstein se pierde, pero hay mucho que se gana.

$\omega^a{}_b$ se denomina la conexión de espín. Esto no existe en la geometría de Riemann pero la geometría diferencial de Cartan lo permite. Ello brinda la capacidad para utilizar espinotensores y para representar el giro del espaciotiempo. La conexión de espín aparece si la variedad base de Riemann se suplementa en cualquier punto dado mediante un espaciotiempo tangencial. Esta conexión de espín nos muestra que el espaciotiempo puede él mismo girar. Más sobre esto más adelante.

Dados dos espacios topológicos, A y B, un fibrado abstracto es un mapa continuo desde uno hacia el otro. B es como una proyección. En el ejemplo de más arriba, si A es un cuerpo humano y B es una sombra, el fibrado abstracto serían las líneas invisibles imaginarias que unen a A con B. El espacio B podría ser un espacio vectorial si la sombra fuese un fibrado abstracto. Cuando se moviese a un nuevo marco de referencia, B podría reproducir a A.

La teoría gauge utiliza fibrados abstractos. Los paquetes de espinotensores se describen más fácilmente mediante el empleo de la tétrada que a través del empleo de los más tradicionales tensores métricos.

La tétrada es la eigenfunción - la verdadera función física - en relatividad general. La forma de Riemann es entonces el producto exterior de dos tétradas y definen la curvatura del espaciotiempo; la forma de la torsión es el producto cuña de dos tétradas y definen la torsión del espaciotiempo.

Nótese que los vectores base en el espaciotiempo tangencial no se derivan de un sistema de coordenadas. Viajarán desde una variedad base a otra sin cambios. Los vectores base son ortonormales a la variedad base del espaciotiempo real. Este es el mismo concepto utilizado en teoría gauge. La tétrada se muestra en la Figura 4-12.

Vectores contravariantes, covariantes y uno-formas

El material aquí incluido es para el estudiante que desea una descripción verbal de las matemáticas utilizadas en la teoría del campo unificado. Todo esto se describe con mayor detalle en el Glosario (aquellos que leen la obra de Evans en su página de Internet www.aias.us) . Sus libros, titulados Generally Covariant Unified Field Theory (Volúmenes 1-3, Arima Publishing) contienen detallados capítulos de introducción que cubren estas matemáticas.

Los tensores contravariantes (o vectores) son los vectores tangenciales que definen las distancias.

Los tensores covariantes (o vectores) brindan todos la misma información. Estos son vectores duales. Las 1-formas también son vectores duales que son como vectores perpendiculares.

Cualquier espacio vectorial tangencial posee un espacio dual o espacio cotangente. El espacio dual es el espacio con todos los mapas lineales del espacio vectorial original hacia los números reales. El espacio dual puede tener un conjunto de vectores base duales. También se denomina el espacio vectorial dual.

Las 1-formas son un tipo de vector que establece líneas en dos dimensiones, planos en tres dimensiones y volúmenes en cuatro dimensiones. Se asemejan al gradiente. Véase la Figura 4-13.

En general, las derivadas poseen subíndices mientras que las coordenadas y las cantidades físicas poseen supraíndices.

En cuatro dimensiones debe establecerse una distinción entre los índices covariantes y los contravariantes, pero los dos son equivalentes en el espacio euclidiano de tres dimensiones; se conocen como tensores cartesianos.

Los objetos geométricos que se comportan como tensores de rango cero son escalares.

Aquellos que se comportan como tensores de primer rango son vectores.

Las matrices se comportan como tensores de segundo rango.

Una contracción es el empleo del producto punto con tensores. El resultado es la suma de los productos de la multiplicación. Pueden tomarse las derivadas tensoriales, y si las derivadas son iguales a cero en cualquier sistema de coordenadas, entonces serán igual a cero en todos ellos.

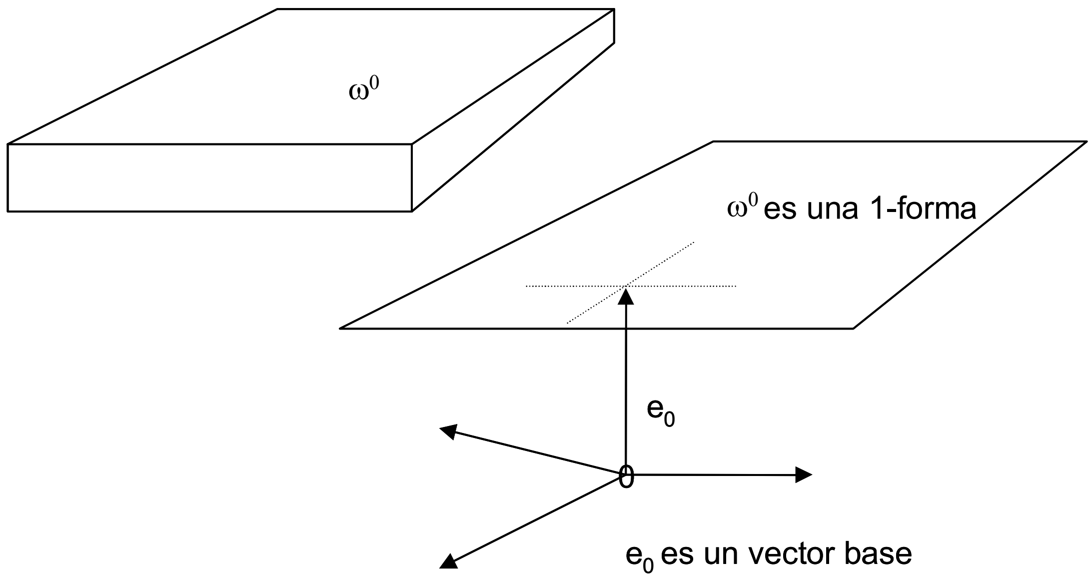
Cada índice de un tensor indica una dimensión en el espaciotiempo.

La geometría diferencial es difícil de aprender, pero tiene mucho poder para realizar cálculos. El material precedente sin duda resulta avanzado y la explicación aquí brindada es incompleta.

El objetivo aquí para el lector que no es un físico es intentar trasmitirle alguna idea acerca del proceso. El resultado es que, a pesar de la torsión y la curvatura del espaciotiempo, puede describirse la geometría al movernos desde un marco de referencia a otro.

Las matemáticas son difíciles; es sólo la idea general la que intentamos trasmitir aquí. La gravitación comprime y tuerce al espaciotiempo. Podemos calcular los resultados utilizando geometría.

Figura 4-13 La 1-forma



La 1-forma se encuentra a un vestor base de distancia del origen, 0. La 1-forma y el vector base son "duales" entre sí. Ellos contienen la misma información en diferentes formas.

Los escalares, sean números reales o imaginarios, son más básicos que los vectores y los tensores utilizados para llegar a ellos.

La cantidad invariante de la métrica en cuatro dimensiones es la distancia, un escalar. Vemos mucha matemáticas, pero no debemos perder de vista nuestro objetivo. Por ejemplo, la distancia en las cuatro dimensiones del espaciotiempo es la invariante. Sin que importe cuál sea el marco de referencia en que nos encontramos - densidad de energía alta o baja, gravitacional o velocidad - la distancia resulta invariante. Así sucede también con la masa, la energía y el momento.

Los invariantes representan la existencia real, en oposición a las cantidades derivadas las cuales no son invariantes.

Ecuaciones de onda

Las ecuaciones de onda pueden basarse en cálculos geométricos sencillos. Parecen muy intimidantes, pero bajo la superficie son muy simples.

Una ecuación de onda básica es y igual al seno de x, o "y = sen x", en terminología matemática. La ecuación de onda unidimensional es una ecuación diferencial parcial

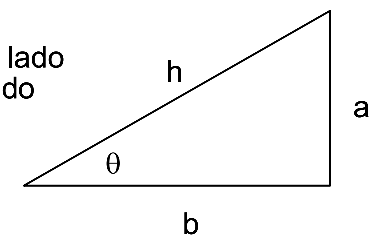
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (9)$$

permitiría el cálculo de la posición de las variables en la Figura 4-14.

∇^2 es el laplaciano. Otra versión se indica como $\Box^2$, y es el operador de d´Alembert, que es la versión en cuatro dimensiones.

Figura4-14 $\psi = \text{sen}\,\theta$

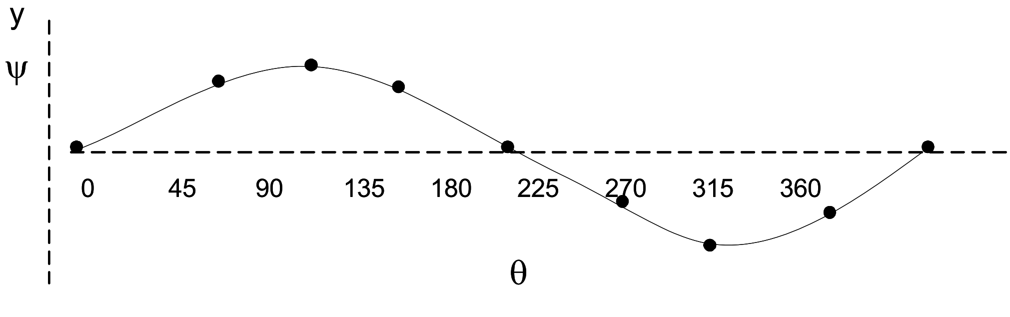
Sen θ se define como el lado Opuesto al ángulo dividido por la hipotenusa, o sen θ = a / h



ψ es el símbolo griego para la letra y de modo que mientras que pueda parecer difícil, es sólo unos ejes x-y con la curva graficada en ellos.

sen θ = a / h

A medida que θ varía entre 0 y 90 grados, el valor del seno varía como a/h, de 0 hasta 1. Esto se representa gráficamente abajo.



El vector gradiente y la derivada direccional, ∇

"Del" es el operador gradiente o vector gradiente, también denominado "grad". Se utiliza para obtener la pendiente de una superficie curva, o el ritmo de cambio de una variable en tres dimensiones.

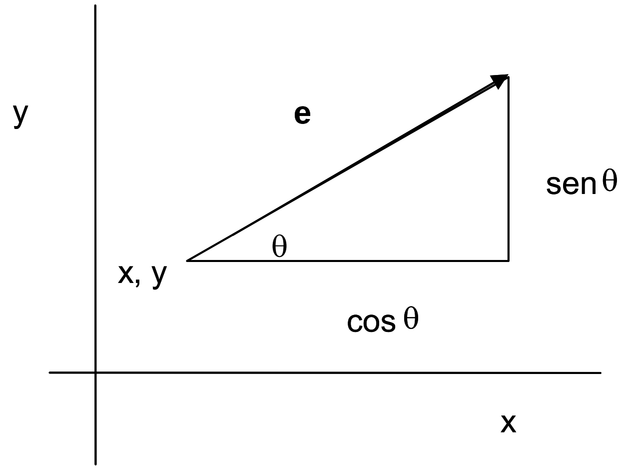
en una base ortonormal e, es:

$$\nabla = e^{i}\,\partial_{i} \qquad (10)$$

Figura 4-15 Derivada Direccional

El vector unitario es **e**.

Aquí se suprimieron 2 Dimensiones.



La *derivada direccional* es el ritmo de cambio de los vectores unitarios. Es simplemente la pendiente de una línea en una dirección específica.

Para evaluar la derivada direccional es necesario utilizar el vector gradiente. Se utiliza con tanta frecuencia que posee su propio nombre. Es una pendiente de una función en múltiples dimensiones con múltiples incógnitas. La versión en cuatro dimensiones es el operador de d´Alembert.

El operador de d´Alembert es $\Box$, que es:

$$\nabla^{2} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \qquad (11)$$

puede escribirse como $\Box$ y ésta es la convención que utilizamos en este libro. También puede expresarse como $\partial^{\mu}\partial_{\mu}$ o también como $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$. Es invariante según Lorentz.

Aquí $$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Podría expresarse como $\Box = (\nabla_{\mu})^{2}$ donde

$$\nabla_{\mu} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{l}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \qquad (12)$$

y el cuadrado es como en la ecuación (11). Aqui **i, j, k** y **l** son los vectores base de un sistema de coordenadas cartesiano de cuatro dimensiones.

i es el vector desde (0,0,0,0) a (1,0,0,0)

j es el vector desde (0,0,0,0) a (0,1,0,0)

k es el vector desde (0,0,0,0) a (0,0,1,0

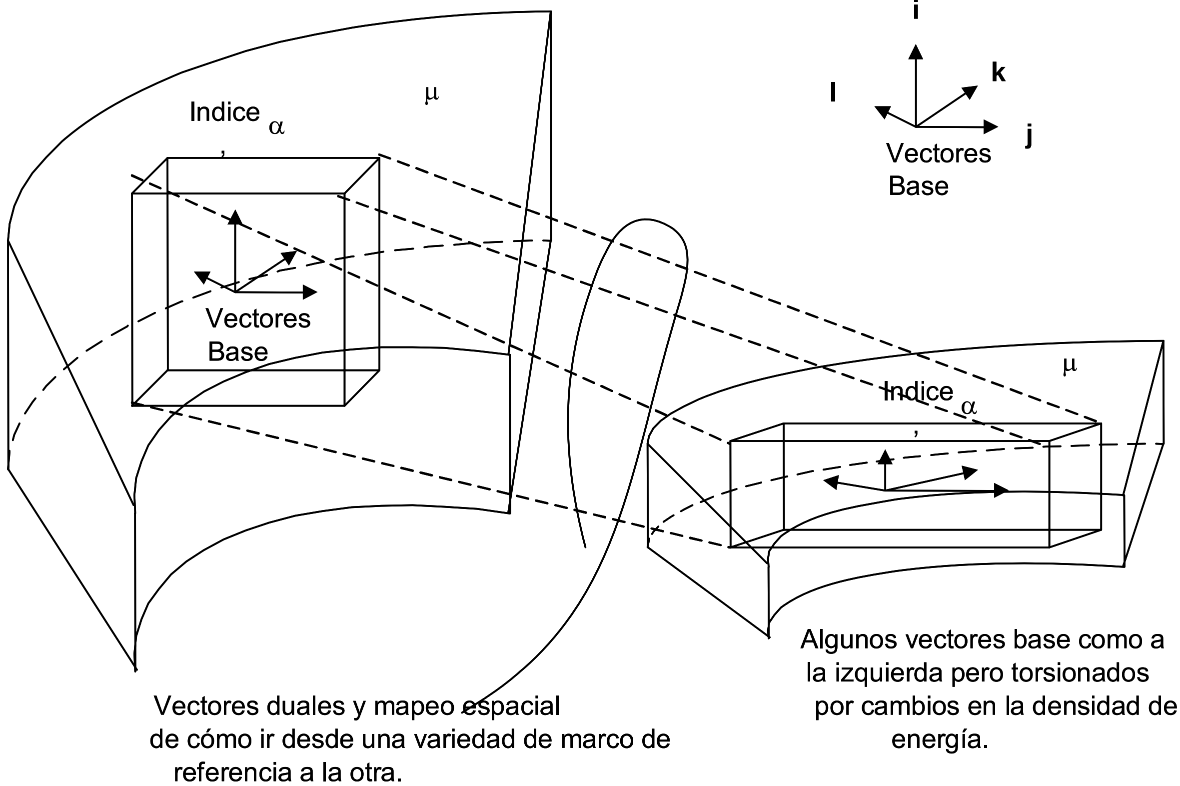
l es el vector desde (0,0,0,0) a (0,0,0,1)

Estos vectores son los vectores cartesianos, que constituyen la base para una variedad que puede denominarse R^4. Cualquier vector **v** de cuatro dimensiones desde (0,0,0,0) hasta (x,y,z,w) puede escribirse como **i**, **j**, **k** y **l**.

O también **v** = x**i** + y**j** + z**k** +w**l** . Esta es una combinación lineal.

Deberá tenerse presente que éste es simplemente el gradiente en cuatro dimensiones entre un punto y otro. Véase la Figura 4-16.

Figura 4-16 Vectores tangenciales base

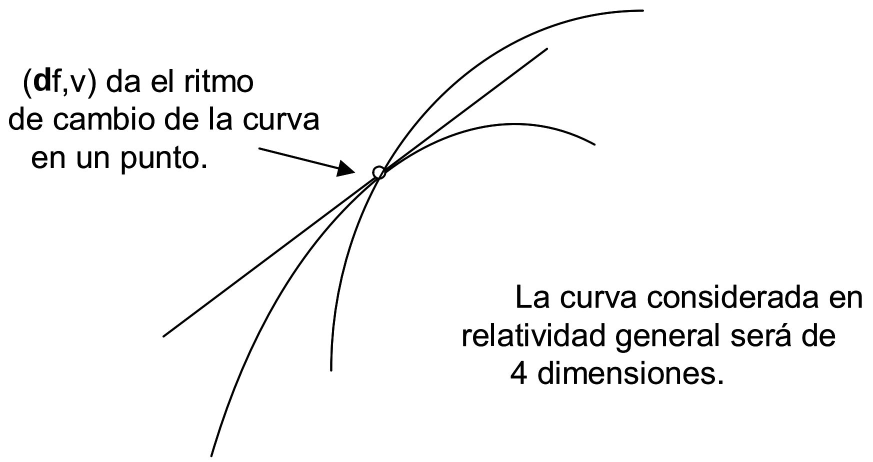


Derivada exterior

La derivada exterior es la misma que el gradiente de una función. Se describe como "**d**f" o como "d $\wedge$". Este es un significado más estricto de la idea de diferencial**.** "**d**f" es una 1-forma y brinda la dirección de cambio. La derivada exterior es un producto cuña pero no hay una conexión de espín.

El gradiente, el rotacional y la divergencia son casos especiales de la derivada exterior. Véase la Figura 4-17.

Figura 4-17 Derivada exterior



Derivada exterior covariante D

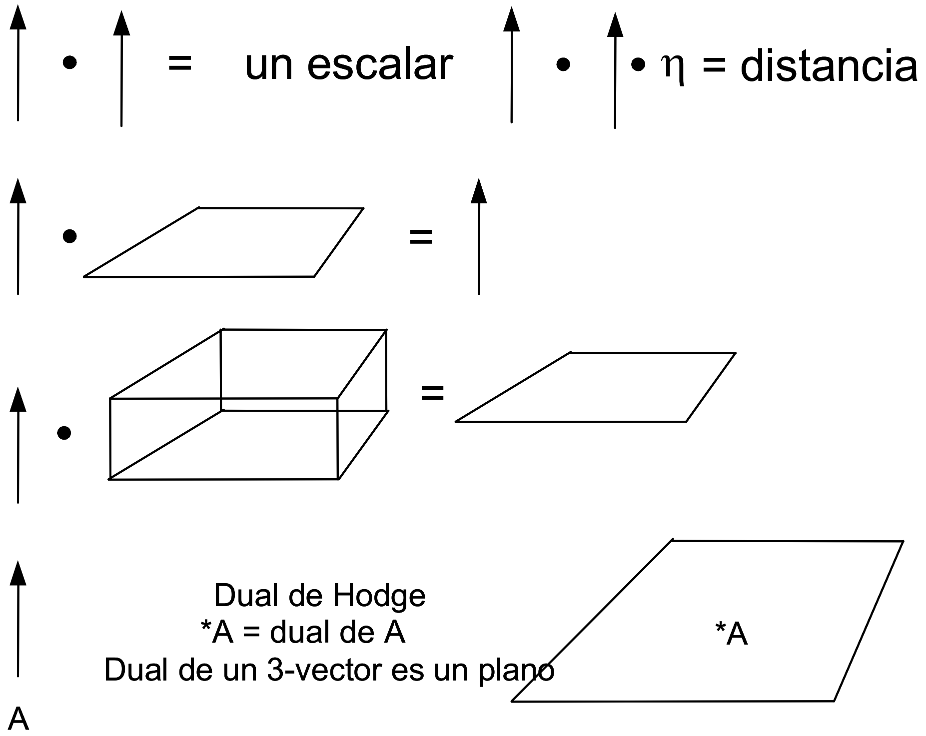
La derivada exterior covariante actúa sobre un tensor. Toma la derivada exterior ordinaria y agrega un término por cada índice con la conexión de espín. La derivada exterior no involucra la conexión. La torsión nunca entra en la fórmula para la derivada exterior.

La derivada exterior covariante actúa de una forma mediante la cual toma la derivada exterior ordinaria y le suma términos apropiados con la conexión de espín. Expresa torsión. Esto resulta crítico para el desarrollo de las ecuaciones de Evans.

Multiplicación vectorial

La Figura 4-18 resume algunas multiplicaciones de vectores y formas.

Figura 4-18 Multiplicación de vectores



Resumen

Tal como se dijo al principio del capítulo, éste es un capítulo difícil. Se recomienda que el lector se concentre en las partes que son comprensibles para él o ella. No hay muchos entre nosotros que hayan estudiado ecuaciones diferenciales, mucho menos aún la más erudita geometría diferencial.

Las ilustraciones y las descripciones verbales debieran de ayudar para establecer el vocabulario necesario para la comprensión de lo que resta de este libro, así como mucho del material que puede hallarse en la página de internet www.aias.us.