Una Ecuación de Campo Covariante Generalizada para la Gravitación y el Electromagnetismo.

por

Myron W. Evans
A.I.A.S.

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se desarrolla una ecuación covariante generalizada para la gravitación y para el electromagnetismo, al considerar el vector de la métrica q^μ en el espaciotiempo curvilíneo no euclideano. La ecuación es

$$R^\mu - \frac{1}{2} R q^\mu = k T^\mu,$$

donde T^μ es el cuatro vector de energía-movimiento canónico, k es la constante de Einstein, R^μ es el cuatro vector de curvatura y R es la curvatura escalar de Riemann. Se muestra que esta ecuación puede expresarse como

$$T^\mu = \alpha q^\mu,$$

donde α es un coeficiente definido en términos de R, k y los factores de escala del sistema de coordenadas curvilíneo. La gravitación se describe a través de la ecuación de campo de Einstein, la cual se recupera al multiplicar ambos lados por q^μ. El electromagnetismo covariante generalizado se describe al multiplicar la ecuación anterior por el producto cuña $\wedge q^\nu$. En consecuencia, la gravitación se describe mediante la métrica simétrica $q^\mu q^\nu$,en tanto que el electromagnetismo se describe mediante la métrica antisimétrica definida por el producto cuña $q^\mu \wedge q^\nu$.

Palabras clave: ecuación de campo covariante generalizada para la gravitación y el electromagnetismo, campo $B^{(3)}$ de la electrodinámica O(3).

1. Introducción.

El principio de la relatividad general establece que toda teoría de la física debiera ser covariante genralizada, es decir, retener su forma matemática bajo la transformación general de coordenadas en un espacio-tiempo no euclidiano definido por cualquier conjunto bien definido de coordenadas curvilíneas [1]. Este principio es muy conocido y aceptado [2], de manera que una teoría unificada también debiera ser covariante generalizada. Sin embargo, en la actualidad, solamente uno de los cuatro campos de la naturaleza, el gravitacional, el electromagnético, el campo nuclear fuerte y el campo nuclear débil, se describe mediante una ecuación de campo covariante generalizada, y esa es la ecuación de campo de Einstein de la gravitación

$$R^{\mu\nu(S)} - \frac{1}{2} R q^{\mu\nu(S)} = k T^{\mu\nu(S)} \qquad (1)$$

Aquí, $q^{\mu\nu(S)}$ es el tensor simétrico de la métrica, $R^{\mu\nu(S)}$ R es el tensor simétrico de Ricci, definido en la geometría de Riemann, R es la curvatura escalar, k es la constante de Einstein, y $T^{\mu\nu(S)}$ es el tensor de energía-momento canónico.

En este documento se infiere una ecuación de campo covariante generalizada para la gravitación y el electromagnetismo mediante el empleo de geometría fundamental. En el espacio-tiempo no euclidiano, la existencia de un tensor simétrico de la métrica $q^{\mu\nu(S)}$ implica la existencia de un tensor de la métrica anti-simétrico $q^{\mu\nu(A)}$. El primero se define mediante el elemento lineal ds^2 que se forma a partir del cuadrado de la longitud de arco, en tanto que el segundo se define mediante el elemento de área dA. En geometría diferencial, la uno-forma ds^2 es dual a la dos-forma dA. El tensor simétrico de la métrica se define mediante el producto del tensor simétrico de la métrica de dos cuatro-vectores de la métrica:

$$q^{\mu\nu(S)} = q^{\mu} q^{\nu} \qquad (2)$$

y el tensor anti-simétrico de la métrica por el producto cuña:

$$q^{\mu\nu(A)} = q^{\mu} \wedge q^{\nu}, \qquad (3)$$

donde el cuatro-vector de la métrica es

$$q^{\mu} = (h^0, h^1, h^2, h^3). \qquad (4)$$

Aquí, h^i son los factores de escala del sistema de coordenadas curvilíneas covariante generalizado que define el espacio-tiempo no euclidiano. Los factores de escala pueden ser números reales o complejos o matrices en el álgebra de Clifford. Ambos tipos de tensores de la métrica son, por lo tanto, definidos por el vector de la métrica q^μ. A partir de este resultado de la geometría, se infiere que si la gravitación se identifica a través de $q^{\mu\nu(S)}$, mediante la bien conocida Ec. (1), entonces el electromagnetismo se identifica mediante $q^{\mu\nu(A)}$. Esta inferencia se desarrolla, en la Sección 3, en una ecuación de campo covariante generalizada para la gravitación y el electromagnetismo, una ecuación expresada en términos del cuatro-vector de la métrica q^μ, el cual se encuentra en la raíz tanto de la gravitación como del electromagnetismo. En la siguiente sección se definen los conceptos geométricos fundamentales necesarios para la ecuación de campo inferida en la Sec. 3.

2. Conceptos geométricos fundamentales.

Limitaremos inicialmente nuestra atención a tres dimensiones espaciales no euclidianas. El conjunto de coordenadas curvilíneas se define como (u_1, u_2, u_3), donde las funciones poseen un único valor y son diferenciables en forma continua, y donde existe una relación bi-unívoca entre (u_1, u_2, u_3) y las coordenadas cartesianas. El vector posición es $\boldsymbol{r}(u_1, u_2, u_3)$ y la longitud de arco es el módulo del vector de desplazamiento infinitesimal.

$$ds = |d\underline{r}| = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_3} du_3 \right| . \qquad (5)$$

Los coeficientes de la métrica son $\partial \underline{r} / \partial u^i$ y los factores de escala son

$$h_i = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \right| . \qquad (6)$$

Los vectores unitarios son

$$e_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial r}{\partial u_i} \qquad (7)$$

y cumplen las relaciones cíclicas de simetría $O(3)$

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2 \qquad (8)$$

donde $O(3)$ es el grupo de rotación del espacio tridimensional [3-8]. Las coordenadas curvilíneas son ortogonales si

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \quad , \quad e_2 \cdot e_3 = 0 \quad , \quad e_3 \cdot e_1 = 0 \qquad (9)$$

El tensor de la métrica simétrica se define entonces a través del elemento lineal, un una-forma de la geometría diferencial:

$$\omega_1 = ds^2 = g^{ij(S)} du_i du_j \quad , \qquad (10)$$

y el tensor de la métrica anti-simétrica a través del elemento de área, un dos-forma de la geometría diferencial:

$$\omega_2 = dA = -\frac{1}{2} g^{ij(A)} du_i \wedge du_j \quad , \qquad (11)$$

Estos resultados se generalizan a las cuatro dimensiones de cualquier espacio-tiempo no euclidiano como sigue:

$$\omega_1 = ds^2 = g^{\mu\nu(S)} du_\mu du_\nu \qquad (12)$$

$$\omega_2 = {}^*\omega_1 = dA = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu(A)} du_\mu \wedge du_\nu \qquad (13)$$

En geometría diferencial, el elemento *du* es dual al producto cuña $du_\mu \wedge du_\nu$.

El tensor de la métrica simétrica es

$$g^{\mu\nu(S)} = \begin{bmatrix} h_0^2 & h_0h_1 & h_0h_2 & h_0h_3 \\ h_1h_0 & h_1^2 & h_1h_2 & h_1h_3 \\ h_2h_0 & h_2h_1 & h_2^2 & h_2h_3 \\ h_3h_0 & h_3h_1 & h_3h_2 & h_3^2 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

y el tensor de la métrica antisimétrica es

$$g^{\mu\nu(A)} = \begin{bmatrix} 0 & -h_0h_1 & -h_0h_2 & -h_0h_3 \\ h_1h_0 & 0 & -h_1h_2 & h_1h_3 \\ h_2h_0 & h_2h_1 & 0 & -h_2h_3 \\ h_3h_0 & -h_3h_1 & h_3h_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

3. La ecuación de campo covariante generalizada.

Se ha demostrado que tanto la métrica simétrica como la métrica antisimétrica pueden estar constituidas a partir de cuatro-vectores q^{μ} métricos individuales en cualquier espacio-tiempo no euclidiano, incluyendo el espaciotiempo de Riemann utilizado en la Eq. (1). Por lo tanto, puede inferirse que la ecuación de campo de Einstein (1) puede construirse a partir de la ecuación de campo covariante generalizada:

$$R^{\mu} - \frac{1}{2} R q^{\mu} = k T^{\mu}. \tag{16}$$

La Ec.(1) se recupera a partir de la Ec. (16) al multiplicar ambos lados de ésta última por el cuatro-vector q^{ν} de la métrica. Por lo tanto, podremos definir los conocidos tensores simétricos que aparecen en la ecuación de campo de Einstein para la gravitación de la siguiente manera:

$$R^{\mu\nu(S)} = R^{\mu} q^{\nu}, \tag{17}$$

$$q^{\mu\nu(S)} = q^{\mu} q^{\nu}, \tag{18}$$

$$T^{\mu\nu(S)} = T^{\mu} q^{\nu}, \tag{19}$$

en términos de los cuatro-vectores más fundamentales R^{μ}; q^{μ}, y T^{μ}. La Ec. (16) brinda la forma covariante generalizada de la segunda ley de Newton:

$$f^{\mu} = \frac{\partial T^{\mu}}{\partial \tau}, \tag{20}$$

donde f^{μ} es un cuatro-vector de fuerza y τ es el tiempo propio. La tercera ley de Newtron y el teorema de Noether (conservación de la energía-momento) se expresan a través del invariante

$$T^{\mu} T_{\mu} = \text{constante}, \tag{21}$$

y la ley universal de Newton de la gravitación, en su forma covariante generalizada, a partir de la Ec. (16), mediante

$$f^{\mu} = \frac{1}{k} \frac{\partial G^{\mu}}{\partial \tau}, \qquad G^{\mu} := R^{\mu} - \frac{1}{2} R q^{\mu}. \tag{22}$$

Los resultados de la teoría gravitacional covariante generalizada también se obtienen a partir de la Ec.(16) porque es la base de la ecuación de campo de Einstein (1).

Hemos argumentado que el cuatro-vector q^μ de la métrica es dual al producto cuña $q^\mu \wedge q^\nu$. A partir de este resultado fundamental de la geometría diferencial [8], se deduce que la ecuación de campo de Einstein es dual a la siguiente ecuación entre dos-formas:

$$R^\mu \wedge q^\nu - \frac{1}{2} R q^\mu \wedge q^\nu = kT^\mu \wedge q^\nu , \tag{23}$$

Una ecuación que se deduce al multiplicar ambos lados de la Ec.(16) por la cuña $\wedge q^\nu$ y en la que aparece el tensor de Ricci antisimétrico, la métrica anti-simétrica, y el tensor antisimétrico de energía-momento, respectivamente, definidos como sigue:

$$R^{\mu\nu(A)} = R^\mu \wedge q^\nu , \tag{24}$$

$$q^{\mu\nu(A)} = q^\mu \wedge q^\nu , \tag{25}$$

$$T^{\mu\nu(A)} = T^\mu \wedge q^\nu . \tag{26}$$

Definimos el tensor de campo antisimétrico

$$G^{\mu\nu(A)} = G^{(0)}\left(R^{\mu\nu(A)} - \frac{1}{2} R q^{\mu\nu(A)}\right). \tag{27}$$

La anti-simetría del tensor implica la siguiente identidad de Jacobi del espacio-tiempo no euclidiano [3-8]:

$$D_\rho G^{(A)}_{\mu\nu} + D_\mu G^{(A)}_{\nu\rho} + D_\nu G^{(A)}_{\rho\mu} := 0 \tag{28}$$

donde D_μ son cuatro-derivadas covariantes generalizadas. En el espaciotiempo de Riemann, pueden definirse mediante símbolos de Christoffel que son anti-simétricos en sus dos índices inferiores. La identidad de Jacobi (28) puede re-expresarse como

$$D_\mu \tilde{G}^{\mu\nu(A)} := 0 , \tag{29}$$

donde

$$\tilde{G}^{\mu\nu(A)} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}^{(A)} \tag{30}$$

es el dual de $G_{\rho\sigma}{}^{(A)}$ y ortogonal a $G_{\rho\sigma}{}^{(A)}$:

$$\tilde{G}^{\mu\nu(A)} G_{\mu\nu}^{(A)} = 0 . \tag{31}$$

Tomando derivadas covariantes, cualquier lado de la Ec. (23) da:

$$D_\mu G^{\mu\nu(A)} = G^{(0)} k D_\mu T^{\mu\nu(A)} . \tag{32}$$

Definimos el cuatro-vector covariante generalizado

$$j^\nu = \mu_0 G^{(0)} k D_\mu T^{\mu\nu(A)} , \tag{33}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío, una constante fundamental [3-8]. Entonces, la Ec. (32) puede expresarse como

$$D_\mu G^{\mu\nu(A)} = j^\nu / \mu_0 . \tag{34}$$

Definimos las Ecs. (29) y (34) como, respectivamente, las ecuaciones de campo homogénea e inhomogénea del electromagnetismo covariante generalizado.

Los campos eléctrico y magnético covariantes generalizados se definen como

$$cB^k = -\frac{1}{2} e^{ijk} G^{ij(A)} , \quad E^k = -G^{0k(A)}$$
$$\tilde{E}^k = -\frac{1}{2} e^{ijk} \tilde{G}^{ij(A)} , \quad c\tilde{B}^k = -G^{0k(A)} , \tag{35}$$

y los tensores de campo electromagnético covariantes generalizados como:

$$G^{\mu\nu(A)} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \tilde{G}^{\mu\nu(A)} = \begin{bmatrix} 0 & -cB^1 & -cB^2 & -cB^3 \\ cB^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ cB^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ cB^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

La identidad de Jacobi (29) deviene una identidad de una teoría de campo de tipo Yang-Mills invariante en gauge [3-8] del electromagnetismo si definimos el tensor de campo como un conmutador de derivadas covariantes:

$$G^{\mu\nu(A)} = \frac{i}{g}\left[D^\mu, D^\nu\right], \tag{37}$$

$$D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu , \tag{38}$$

y A^μ es el potencial vectorial. El tensor de campo $G^{\mu\nu(A)}$ es invariante bajo la transformación gauge

$$A^{\mu\prime} = SA_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^{-1} \tag{39}$$

Para cualquier simetría interna de campo gauge. La identidad de Jacobi (29) puede expresarse como la identidad [3-8]

$$\sum_{\text{cíclico}} \left[D_\rho, \left[D_\mu, D_\nu\right]\right] := 0 \tag{40}$$

para cualquier simetría de grupo gauge.

Por lo tanto, se ha demostrado que una teoría de campo de Yang Mills invariante en gauge para el electromagnetismo puede deducirse a partir de la ecuación de campo covariante generalizada (16), la cual también produce la teoría de la gravitación covariante generalizada e invariante en gauge propuesta inicialmente y en forma contemporánea por Einstein y Hilbert a finales de 1915.

4. Análisis de los resultados.

La expresión más sencilla de la Ec.(16) puede obtenerse a partir de la conocida definición de la curvatura escalar R en la geometría de Riemann:

$$R = g^{\mu\nu(S)} R^{(S)}_{\mu\nu} = \left(h_0^2 - h_1^2 - h_2^3 - h_3^3\right) q^\mu R_\mu . \tag{41}$$

Puede observarse que esta ecuación puede obtenerse a partir de la ecuación

$$R^\mu = \frac{1}{h^4} R q^\mu, \quad h^2 := h_0^2 - h_1^2 - h_2^3 - h_3^2 , \tag{42}$$

multiplicando ambos lados de la Ec. (42) por $h^2 q_\mu$. Utilizando la Ec. (42) en la Ec. (16) se obtiene

$$T^{\mu} = \alpha q^{\mu}, \tag{43}$$

donde el coeficiente de proporcionalidad se define como

$$\alpha := \frac{R}{k}\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{2}\right). \tag{44}$$

En la híper-esfera unitaria

$$h_0^2 - h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 = 1, \tag{45}$$

la proporcionalidad se simplifica a

$$\alpha = R/2k. \tag{46}$$

Utilizando la definición (17) para el tensor de Ricci simétrico y multiplicando en ambos lados por q_{ν}, se obtiene también la siguiente expresión util para el cuatro-vector de curvatura como una contracción del tensor de Ricci simétrico en la geometría de Riemann:

$$R^{\mu} = (1/h^2)\, q_{\nu} R^{\mu\nu(S)} \tag{47}$$

La Ec.(43) nos muestra que, tanto en el caso de la gravitación como en el electromagnetismo el cuatro-vector T^{μ} de energía y momento covariante generalizado es proporcional al cuatro-vector de la métrica q^{μ} covariante generalizado, a través del coeficiente de proporcionalidad α dependiente de la métrica. Es probable que este resultado también se cumpla para los campos de fuerza débil y fuerte, porque se sabe que el campo electromagnético puede unificarse con los campos débil y fuerte [3-8] y porque tanto el campo débil como el fuerte son campos gauge. Por lo tanto, es probable que la Ec. (16) sea una ecuación de campo covariante generalizada de la teoría del campo unificado clásica. Este resultado se vuelve un requisito por parte del Principio de la Relatividad General.

En el caso especial en el que las derivadas covariantes de la teoría de campo de Yang Mills posean una asimetría interna $O(3)$, con índices (1),(2), y (3), donde ((1),(2),(3)) constituye la representación del espacio circular complejo, las Ecs. (29) y (34) devienen las ecuaciones de campo de la electrodinámica $O(3)$ [3-7]. Esto último se ha discutido ampliamente en la literatura y evaluado frente a datos experimentales provenientes de varias fuentes, y puede ahora reconocerse como un ejemplo de la Ec.(16), ilustrando así las ventajas de la Ec.(16) sobre el punto de vista heredado acerca del electromagnetismo. Por lo tanto, la electrodinámica $O(3)$ es una teoría de la relatividad general, en tanto la electrodinámica de Maxwell-Heaviside constituye una teoría de la relatividad restringida en un espacio-tiempo euclidiano, en el que el campo es una entidad sobreimpuesta en el marco de referencia, una teoría del campo gauge de Yang Mills con una simetría de grupo interno gauge. Las varias ventajas de la electrodinámica $O(3)$ por encima de la opinión heredada ya se han discutido en la literatura [3-7] y puede ahora observarse que estas ventajas surgen a partir del hecho de que la Ec.(16) da origen a una teoría del electromagnetismo covariante generalizada, así como también de la bien conocida teoría de la gravitación covariante generalizada. Utilizando la Ec.(43) puede observarse que tanto la gravitación como el electromagnetismo se definen por el vector de la métrica q^{μ} con el coeficiente de proporcionalidad α, siendo ambos campos esencialmente el marco de referencia mismo. Podemos así concluir que la naturaleza no euclidiana del espacio-tiempo da origen tanto a la gravitación como al electromagnetismo a través de la Ec. (16). Sachs [9] logró llegar a la misma conclusión mediante el empleo del álgebra de Clifford, pero el importante esquema de unificación de Sachs se basa en el álgebra de Clifford y resulta considerablemente más complicado que la Ec. (16), la cual resulta preferida por aplicación de la Navaja de Ockham - la elección de la más sencilla entre dos posibles teorías.

Agradecimientos.

Se reconocen y agradecen las extensas discusiones con colegas y eméritos de la Fundación Alpha.

Referencias.

[1] E. G. Milewski, The Vector Analysis Problem Solver (Research and Education Association, Nueva York, 1987).

[2] A. Einstein, The Meaning of Relativity (Princeton University Press, 5a edición. 1955).

[3] M. W. Evans, J.-P. Vigier, et al., The Enigmatic Photon (Kluwer Academic, Dordrecht, 1994 a 2002, encuadernación en tapa dura y blanda),Vols. 1-5.

[4] M. W. Evans y L. B. Crowell, Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field (World Scientfic, Singapur, 2001).

[5] M. W. Evans y A. A. Hasanein, The Photomagneton in Quantum Field Theory (World Scientific, Singapur, 1994).

[6] M. W. Evans y S. Kielich, eds., Modern Non-Linear Optics, en I. Prigogine y S. A. Rice, recop. de la serie Advances in Chemical Physics (Wiley Inter-Science, Nueva York, 1995 a 1997, encuadernación de tapa dura y blanda), Vol. 85, 1a edición.

[7] M. W. Evans, ed., 2a edn. de la Ref. 6, Vol. 119 (Wiley Inter-Science, 2001).

[8] L. H. Ryder, Quantum Field Theory, 2a edición. (Cambridge University Press, 1987 y 1996).

[9] M. Sachs en la Ref. 7, Vol. 119(1), y referencias allí incluidas.