Una ecuación de onda covariante generalizada para la Gran Teoría del Campo Unificado.

por

Myron W. Evans

Alpha Institute for Advanced Study (emyrone@aol.com)

Tradución: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se deduce geométricamente una ecuación de onda covariante generalizada para la gran teoría del campo unificado. La ecuación establece en forma general que el operador de d´Alembert, al actuar sobre el *vielbein* desaparece para los cuatro campos que se piensa existen en la naturaleza: gravitación, electromagnetismo, campo débil y campo fuerte. Las diversas ecuaciones de campo conocidas se deducen de la ecuación de campo cuando el vielbein es la eigenfunción. Cuando se aplica la ecuación de onda a la gravitación la ecuación de onda es la eigenecuación de la mecánica ondulatoria, que corresponde a la ecuación de onda de Einstein en mecánica clásica, la eigenfunción del vielbein allí desempeñando el papel del campo gravitacional cuantizado. Las tres leyes de Newton, la ley de Newton de la gravitación universal y la ecuación de Poisson se recuperan en los límites clásicos y no relativistas del campo débil del campo gravitacional cuantizado. La ecuación de campo para la partícula individual y las ecuaciones de Klein-Gordon se recuperan en el límite relativista y de campo débil de la ecuación de campo, cuando se consideran componentes escalares de la eigenfunción del vielbein del campo gravitacional cuantizado. Se recupera laecuación de Schroedinger en el límite no relativista del campo débil de la ecuación de Klein-Gordon). Se recupera la ecuación de Dirac en este límite de campo débil del campo gravitacional (el límite no relativista del campo gravitacional cuantizado relativista, cuando el vielbein cumple el papel del espinotensor.Se recuperan las ecuaciones de onda y de campo de la electrodinámica $O(3)$ cuando el vielbein deviene la eigenfunción del *dreibein* (tríada), cuyos tres índices espaciales ortonormales se identifican con los tres índices circulares complejos (1), (2), (3), y cuyos cuatro índices son los índices del espacio-tiempo no euclidiano (la variedad o manifold base). Este dreibein es el dreibein del potencial del campo electromagnético $O(3)$ (uncuatro-vector de potencial electromagnético para cada índice (1), (2), y (3)). La ecuación de onda del campo débil que viola la paridad se recupera cuando los índices del espacio ortonormal de la eigenfunción del dreibein relativista se identifican con los índices de los tres bosones masivos del campo débil. La ecuación de campo del campo fuerte se recupera cuando los índices espaciales ortonormales de la eigenfunción del vielbein relativista devienen los ocho índices definidos por los generadores de grupo del grupo $SU(3)$.

Palabras clave: Ecuación covariante generalizada, gran teoría del campo unificado, gravitación, electromagnetismo con simetría superior, electrodinámica $O(3)$, campo débil, campo fuerte.

.

1. Introducción

Recientemente [1] se ha propuesto una ecuación de campo clásica covariante generalizada para la unificación de los campos clásicos gravitacional y electromagnético, mediante la consideración del cuatro-vector de la métrica q_μ en un espacio-tiempo no euclidiano. En este documento se deduce la correspondiente ecuación en mecánica ondulatoria (o cuántica) considerando la acción del operador covariante de d´Alembert sobre el cuatro-vector de la métrica considerado como la eigenfunción. Deduciendo una ecuación de compatibilidad de la métrica para el cuatro-vector de la métrica, se obtiene una ecuación de onda a partir de una propiedad geométrica fundamental: el covariante operador de d'Alembert actuando sobre el vector de la métrica desaparece en el espacio-tiempo no euclidiano. Este resultado geométrico también se cumple cuando la eigenfunción es un tensor de la métrica simétrico o anti-simétrico [1], y, en forma más general, cuando la eigenfunción es un vielbein [2]. La ecuación de onda con tensor de la métrica simétrico como eigenfunción es el resultado directo de la ecuación de compatibilidad de la última, y la ecuación de onda con vielbein como eigenfunción es el resultado del postulado de la tétrada [2]. Este último es un resultado fundamental de la geometría, irrespectivo de la compatibilidad de la métrica, y esté o no el tensor de la métrica libre de torsión. La ecuación de onda puede entonces construirse como una eigenfunción a partir de la geometría, con diferentes tipos de eigenfunción. Esto se logra aquí expresando el operador de d'Alembert covariante como una suma del operador de d'Alembert del espacio-tiempo plano $\Box$ y un término dependiente de la naturaleza no euclidiana del espacio-tiempo. Este último término se demuestra como siendo una curvatura escalar R que se identifica como el eigenvalor. El eigenoperador es, por lo tanto, el operador $\Box$, y la ecuación de onda es una propiedad geométrica fundamental del espacio-tiempo no euclidiano [1, 2]. Más generalmente, la eigenfunción es el vielbein [2] $e^a{}_\mu$, que relaciona una base ortonormal (índice latino) con una base de coordenadas (índice griego), y la ecuación de onda covariante generalizada es la eigenecuación

$$(\Box + kT)e^a{}_\mu = 0. \tag{1}$$

La ecuación de campo de Einstein [1-3] de la relatividad general gravitacional puede expresarse en la forma compacta [1-4]

$$R = -kT, \tag{2}$$

donde R y T se obtienen [4] a partir del tensor de curvatura y del tensor de momento de energía canónica por contracción de índice. Si $q_{\mu\nu}{}^{(S)}$ denota el tensor de la métrica simétrico definido [1] por

$$q_{\mu\nu}{}^{(S)} = q_\mu q_\nu \tag{3}$$

entonces

$$R = q^{\mu\nu(S)} R_{\mu\nu}, \quad T = q^{\mu\nu(S)} T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

donde $R_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ son también tensores simétricos. Por lo tanto, la ecuación de onda covariante generalizada es

.

$$(\Box + kT)e^{a}{}_{\mu} = 0, \quad kT = -R. \tag{5}$$

Puede verse que la Ec.(5) tiene la forma de las conocidas ecuaciones de onda de segundo orden de la dinámica y la electrodinámica, tales como la ecuación de onda de la partícula individual, la de Klein-Gordon, Dirac, Proca, y la de d'Alembert [5] y formas limitantes no relativistas, tales como la ecuación de Schroedinger, y, en el límite clásico, las ecuaciones de Poisson y Newton. El empleo del vielbein como eigenfunción posee varias conocidas ventajas [2]:

(a) El postulado de la tétrada:

$$D_{\nu} e^{a}{}_{\mu} = 0, \tag{6}$$

donde D_{ν} denota la derivada covariante [2], se cumple para cualquier conexión, sea o no compatible con la métrica o libre de torsión.
(b) El uso del vielbein como eigenfunción permite que se analicen los espinores en un espacio-tiempo no euclideano, y esto es esencial para obtener la ecuación de Dirac a partir de la Ec.(5).
(c) El índice a del vielbein puede identificarse con el índice interno de la teoría gauge [2,5], y esta propiedad es esencial si la Ec.(5) ha de ser una ecuación de la gran teoría del campo unificado.
(d) La teoría del vielbein está muy desarrollada y se relaciona estrechamente con la teoría de Cartan-Maurer, una generalización de la geometría de Riemann [2].

El grupo de estructura del paquete de la tangente en la variedad base en

cuatro dimensiones es GL(4,R) [2], el grupo de matrices reales invertibles de 4 x 4. En una métrica de Lorentz esto se reduce al grupo de Lorentz $SO(3,1)$. Las fibras del paquete de fibras están unidas con rotaciones ordinarias [2] y el grupo de estructura del nuevo paquete es $SO(3,1)$, el grupo de rotaciones en 3 dimensiones espaciales sin la suposición de simetría de paridad. El potencial electromagnético se define en este paquete con el dreibein $A^{a}{}_{\mu}$, donde a es (1), (2) o(3), los índices de la representación circular compleja del espacio tridimensional. La evolución de la electrodinámica de este modo, como teoría gauge con simetría $O(3)$ de grupo gauge, donde $O(3)$ es el grupo de rotaciones en tres dimensiones con simetría de paridad, se inició con la propuesta del campo B(3) [6] como el responsable del efecto Faraday inverso en todos los materiales (magnetización libre de fase mediante radiación electromagnética con polarización circular). La electrodinámica de Maxwell Heaviside es una teoría de campo gauge sin índices internos, y cuya simetría de grupo gauge interna es $U(1)$ [7-12]. Luego de una década de desarrollo se sabe [12] que existen numerosas instancias en las que la electrodinámica $O(3)$ sobrepasa a la electrodinámica $U(1)$ en su capacidad de describir datos experimentales, por ejemplo datos de interferometría, reflexión, óptica física en general, el efecto Faraday inverso, y su equivalente de resonancia, la resonancia fermiónica inducida por radiación [7-12]. Por lo tanto, se conocen ahora muchos datos que indican que el sector electromagnético de la gran teoría de campo unificado se describe mediante una teoría de campo gauge con simetría $O(3)$, no $U(1)$. En el desarrollo de electrodinámica $O(3)$, la conexión del paquete de fibra interna de la teoría gauge se identificó por primera vez como la conexión en

.

el paquete tangente de la relatividad general [2]. Esto constituye un paso esencial en la evolución hacia una sencilla y poderosa teoría de campo unificado, tal como se representa en la Ec.(5) de este documento. El paquete tangente se define con respecto a la variedad base, que es el espacio-tiempo no euclidiano de cuatro dimensiones [1]. Previo al desarrollo de una electrodinámica con simetría superior, y de la electrodinámica covariante generalizada [1,13,14] el paquete tangente de la relatividad general [2] no se identificaba con el paquete de fibras de la teoría gauge, en otras palabras se pensaba que el índice interno de la teoría gauge era un índice de un espacio abstracto sin relación con el espacio-tiempo [2]. En la electrodinámica $O(3)$, el índice interno $a = (1),(2),(3)$ representa un espació físico ortonormal que es tangencial a la variedad base y en la base ((1),(2),(3)) es posible definir vectores unitarios $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}$, los cuales definen un espacio tangente, un espacio ortonormal a la variedad base (el espacio-tiempo, no euclidiano y de cuatro dimensiones). Por lo tanto se vuelve posible invocar el dreibein, o tríada, como ya se ha descrito, con los tres índices latinos (a) que representan el espacio ortogonal, y los cuatro indices griegos (μ) la variedad base. Los índices $a = (1),(2),(3)$ pueden utilizarse para definir el sistema de vectores unitarios en un análisis de coordenadas curvilíneas [1,14,15]. Uno de los vectores unitarios, p.ej., $\boldsymbol{e}^{(1)}$, es un vector unitario tangente a la curva, y los otros dos, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ y $\boldsymbol{e}^{(3)}$, son mutuamente ortogonales a $\boldsymbol{e}^{(1)}$. Este procedimiento resuelve dos inconsistencias fundamentales de la teoría de campo, tal como ésta existe al presente:

(1) El campo gravitacional es, en relatividad general, el espacio-tiempo no euclidiano, mientras que los otros 3 campos (electromagnético, débil y fuerte) son entes superpuestos al espacio-tiempo plano o euclidiano.

(2) El campo electromagnético $U(1)$ posee un carácter abeliano y lineal, mientras que los otros tres son no abelianos y no lineales [2].

Por lo tanto, el espacio gauge interno de la electrodinámica $O(3)$ se identifica con un espacio tangente en la base circular compleja ((1),(2),(3)), una base elegida para representar polarización circular, una conocida propiedad empírica de la radiación electromagnética [5-14]. Esto permite que el electromagnetismo se desarrolle como una teoría de la relatividad general [1], utilizando derivadas covariantes con simetría $O(3)$, que devienen conexiones afines al espín en teoría de vielbein [2]. El tensor de campo electromagnético $O(3)$ deviene un tensor de torsión de Cartan Maurer [2], el cual se define con una conexión afín al espín en el paquete tangente de la relatividad general. La Ec.(5) contiene estas propiedades, junto con la habilidad para describir los campos gravitacional, débil y fuerte. Por lo tanto, la Ec.(5) es una ecuación de onda covariante generalizada de la gran teoría del campo unificado.

En la Sec. 2, se deduce la ecuación de onda (5) para varias formas de la eigenfunción, usando ecuaciones de compatibiidad métrica para el vector de la métrica q_μ y los tensores simétrico y anti-simétrico $q_\mu q_\nu$ y $q_\mu \wedge q_\nu$ [1] y usando el postulado de la tétrada [2] para el vielbein $e^a{}_\mu$. En la Sec. 3 se expresan la ecuación de transporte paralelo y la ecuación de la geodésica [2-4] en términos del 4-vectorde la métrica q_μ, y se demuestra que la ecuación de compatibilidad métrica del cuatro-vector de la métrica es una solución de la ecuación de la geodésica.

.

En la Sec.4, se deducen la ecuación de Poisson y las ecuaciones newtonianas en el límite del campo débil de la teoría gravitacional. En la Sec. 5, se deducen las ecuaciones de onda de segundo orden desde la Ec. (5) en varios límites para los cuatro campos conocidos de la naturaleza. Finalmente, la Sec. 6 es una discusión acerca de algunas posibles líneas de trabajo futuro en base a la Ec. (5) y de su equivalente clásico dado en la Ref. [1].

2. Deducción de la Ecuación de Onda Covariante Generalizada.

La ecuación de onda se basa en la siguiente expresión para el operador covariante

de d'Alembert:

$$D^\rho D_\rho = \Box + D^\mu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}\,, \tag{7}$$

donde

$$D^\mu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} = \partial^\mu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\mu\rho}{}_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \tag{8}$$

es la derivada covariante del símbolo de Christoffel con índice contraído $\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}$. La Ec.(7) se obtiene considerando primero al commutator [2] $[D_\mu, D_\nu]$ actuando sobre el vector de la métrica inverso q^ρ [1]:

$$\begin{aligned}
&[D_\mu, D_\nu] q^\rho = D_\mu D_\nu q^\rho - D_\nu D_\mu q^\rho \\
&= \partial_\mu (D_\nu q^\rho) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} D_\lambda q^\rho + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} D_\nu q^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu q^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}) q^\sigma + \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} \partial_\mu q^\sigma - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\lambda q^\rho \\
&- \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma} q^\sigma + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} \partial_\nu q^\sigma + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} q^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}) q^\sigma \\
&- 2(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}) D_\lambda q^\rho \\
&= R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} q^\sigma - T^\lambda{}_{\mu\nu} D_\lambda q^\rho,
\end{aligned} \tag{9}$$

donde $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ es el tensor de Riemann y $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ es el tensor de torsión. Consideración de la simetría de la Ec. (9), e índices contraídos, $\rho = \sigma$, conduce al resultado

$$D^\mu D_\mu = \partial^\mu \partial_\mu + \partial^\mu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\mu\rho}{}_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} + 2\Gamma^\lambda{}_{\mu\mu} D_\lambda. \tag{10}$$

En esta expresión, los símbolos de Christoffel se definen como [2]

$$(\Gamma_\mu)^\rho{}_\rho := \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}\,, \quad (\Gamma_\mu)^\rho{}_\lambda := \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\,, \quad \text{etc.}, \tag{11}$$

pero, por convención [2], se omiten en la notación los paréntesis. Seguimos esta convención en lo que resta del documento. Para cualquier vector V^ν,

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda. \tag{12}$$

.

Por lo tanto, podemos escribir

$$D^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} = \partial^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\mu\rho}{}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}. \tag{13}$$

Por lo tanto, el operador covariante de d'Alembert es, en general

$$D^{\mu}D_{\mu} = \Box + D^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} + 2\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu}D_{\lambda} \tag{14}$$

y puede pensarse, cualitativamente, como "medio tensor de Riemann más medio tensor de torsión." Este es un resultado geométrico independiente de toda consideración de teoría de campo.

La Ec.(5), la ecuación de onda para el vielbein como eigenfunción, se obtiene a partir del postulado de la tétrada [2]:

$$D_{\rho}e^{a}{}_{\mu} = 0, \tag{15}$$

que se cumple ya sea que la conexión sea, o no, compatible con la métrica o libre de torsión. Diferenciando la Ec. (15) en forma covariante da la Ec.(5):

$$\begin{aligned} D^{\rho}(D_{\rho}e^{a}{}_{\mu}) &:= D^{\rho}D_{\rho}e^{a}{}_{\mu} = \left(\Box + D^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} + 2\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu}D_{\lambda}\right)e^{a}{}_{\mu} \\ &= \left(\Box + D^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}\right)e^{a}{}_{\mu} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

La Ec.(16) es, por lo tanto, un resultado geométrico independiente de cualquier suposición respecto del símbolo de Christoffel y su relación con el tensor de la métrica [2] o vector de la métrica [1]. El operador covariante de d'Alembert que aparece en la ecuación de onda (16) es la suma del op. de d'Alembert del espacio-tiempo plano $\Box$ y del término $D^{\mu}\Gamma\mu\rho^{\rho}$. Este último se identifica como *curvatura escalar* (R) porque tiene las unidades de metros cuadrados a la inversa y se define mediante una contracción de índice [2]. R se obtiene convencionalmente contrayendo índices en el tensor de Riemann. Carroll [2], por ejemplo, define R como sigue:

$$R := q^{\sigma\nu(S)}R^{\lambda}{}_{\sigma\lambda\nu}, \tag{17}$$

donde el tensor de Ricci es [2]

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{18}$$

y el tensor de Riemann con descenso de índice es [2]

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} := q_{\rho\lambda}{}^{(S)}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}. \tag{19}$$

No obstante, Sachs [16] da una definición diferente del tensor de Ricci:

$$R_{\kappa\rho} := q^{\mu\lambda(S)}R_{\mu\kappa\rho\lambda}; \tag{20}$$

así, suponiendo la Ec.(19) y contrayendo índices $\alpha = \lambda$:

$$R_{\kappa\rho} = \delta^{\lambda}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\kappa\rho\lambda} = q^{\mu\lambda(S)}q_{\mu\alpha}{}^{(S)}R^{\alpha}{}_{\kappa\rho\lambda} \tag{21}$$

.

Comparando las Ecs.(18) y (21), se observa que la definición de la curvatura escalar R es una cuestión de convención, y no está normatizada. Diferentes autores dan diferentes definiciones. Por lo tanto, la R que aparece en la ecuación de Einstein con índices reducidos, la Ec.(2), es cuestión de convención. Más aún, el signo negativo que aparece en la Ec.(2) también es cuestión de convención; el mismo Einstein [4] usaba estaba ecuación bajo la forma $R = kT$, sin el signo negativo. En lo que resta de este documento, utilizaremos la convención contemporánea [2] $R = -kT$. La regla general es que la curvatura escalar R se obtiene por una contracción de índices en el tensor de Riemann, que posee varias conocidas propiedades de simetría [2], por ejemplo, es anti-simétrico en sus dos últimos índices. Utilizando la siguiente elección de contracción de índices:

$$R := R^{\mu}{}_{\nu\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}\,, \tag{22}$$

puede verse que en esta convención la curvatura escalar es

$$\begin{aligned} R &:= \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\nu} - \left(\partial_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}\right) \\ &= D_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\nu} - D_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Comparando las Ecs.(16) y (23), se deduce que la curvatura escalar

$$R := -D^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} \tag{24}$$

que aparece en la definición del operador covariante de d'Alembert es, cualitativamente,"la mitad" de la curvatura escalar de la Ec.(3), obtenida directamente del tensor de Riemann. Este resultado es consistente con el hecho de que el operador covariante de d'Alembert es, cualitativamente (o en términos aproximados), la mitad del tensor de Riemann más el de torsión. Si se supone que el símbolo de Christoffel es simétrico en sus dos índices inferiores (como en la convención en relatividad general tradicional [2]) entonces la curvatura escalar R definida en la Ec.(24) deviene el segundo término en la Ec.(23). Si el símbolo de Christoffel es antisimétrico en sus dos índices inferiores, como en la definición del tensor de torsión (Ec.(9)), entonces el segundo término en la Ec.(23) es el negativo de la definición que aparece en la Ec.(24). Sin embargo, es importante recalcar que la Ec.(16) es válida sea cual fuere la simetría del símbolo de Christoffel, porque la Ec.(16) es el resultado directo del postulado de la tétrada, la Ec.(6). Por lo tanto, la Ec.(16) se cumple para el espacio-tiempo curvo (gravitación) y el espacio-tiempo con torsión (electromagnetismo). Usando la Ec.(2), deducimos la ecuación de onda en la forma

$$(\Box + kT)e^{a}{}_{\mu} = 0, \tag{25}$$

donde

$$D^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} = kT = -R. \tag{26}$$

Puede obtenerse una ecuación de onda con menor validez con el tensor métrico simétrico de la ecuación de campo de Einstein [1-4] como eigenfunción. Esta ecuación de onda surge de la condición de compatibilidad métrica [2]:

.

$$D_\rho {q_{\mu\nu}}^{(S)} = 0. \tag{27}$$

Diferenciando las Ecs.(17) covariantemente lleva a la ecuación de onda como la eigenecuación:

$$D^\rho D_\rho {q_{\mu\nu}}^{(S)} = (\Box + kT){q_{\mu\nu}}^{(S)} = 0, \tag{28}$$

donde ${q_{\mu\nu}}^{(S)}$ es la eigenfunción. Un tercer tipo de ecuación de onda puede obtenerse utilizando la definición [1]

$$ {q_{\mu\nu}}^{(S)} = q_\mu q_\nu. \tag{29}$$

La diferenciación covariante de productos se define con el teorema de Leibniz [2], por lo que la compatibilidad métrica del tensor métrico simétrico, la Ec.(27), implica que

$$D_\rho(q_\mu q_\nu) = q_\mu(D_\rho q_\nu) + (D_\rho q_\mu)q_\nu = 0, \tag{30}$$

para la primera derivada, y

$$\begin{aligned} D^2(q_\mu q_\nu) &:= (D^\rho D_\rho)(q_\mu q_\nu) \\ &= q_\mu D^2 q_\nu + 2(D_\rho q_\mu)(D_\rho q_\nu) + q_\nu D^2 q_\mu \\ &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

para la segunda derivada. Una solución consistente de las Ecs. (30) y (31) es

$$D_\mu q_\nu = 0, \tag{32}$$

que es una condición de compatibilidad métrica para el vector métrico q_μ. Diferenciando la Ec.(32) de modo covariante da la ecuación de onda como una eigenecuación con el vector métrico q_μ como eigenfunción:

$$D^\rho D_\rho q_\mu = (\Box + kT)q_\mu = 0. \tag{33}$$

Finalmente, puede demostrarse en forma similar que existe una ecuación de onda con métrica anti-simétrica ${q_{\mu\nu}}^{(A)} = q_\mu \wedge q_\nu$ como eigenfunción, o sea:

$$(\Box + kT){q_{\mu\nu}}^{(A)} = 0. \tag{34}$$

3. Ecuaciones fundamentales en términos del vector de la métrica.

La ecuación de compatibilidad métrica (32) puede obtenerse independientemente como una solución de la ecuación de transporte paralelo [2] escrita para el 4-vector

métrico inverso q^μ:

$$\frac{Dq^\mu}{ds} := \frac{dq^\mu}{ds} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}q^\lambda = 0, \tag{35}$$

.

donde dx^{ν}/ds es el vector tangente a q^{μ}. Aquí,

$$(ds)^2 = q^{\mu} q^{\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \tag{36}$$

es el cuadrado del elemento lineal en coordenadas curvilíneas [1]. La ecuación de la geodésica para q^{μ} es:

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{dq^{\mu}}{ds}\right) = 0. \tag{37}$$

Ahora usamos la regla de la cadena[17],si $u = f(x, y)$; entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}; \tag{38}$$

así, si $q^{\mu} = q^{\mu}(x^{\nu})$, entonces

$$\frac{dq^{\mu}}{ds} = \frac{\partial q^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{ds}. \tag{39}$$

Usando la Ec.(39) en la Ec.(35), se obtiene

$$\left(\frac{\partial q^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}\, q^{\lambda}\right)\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0, \tag{40}$$

o sea,

$$(D_{\nu} q^{\mu})\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0. \tag{41}$$

En gral $dx^{\nu}/ds \neq 0$, o sea la Ec.(32), la condición de compatibilidad métrica para q_{μ}, es solución de Ec. (41). Por tanto, la ec. de compatibilidad para q_{μ} puede deducirse como una solución de la ecuación de transporte paralelo para q^{μ}. La ecuacion de la geodésica (37) sigue de la ecuación de transporte paralelo (35), así que la ecuacion de compatibilidad metrica para q_{μ} es un caso especial de la ecuación geodésica para q^{μ}. Usando la Ec.(39), la ecuación geodésica deviene

$$\left(\frac{D}{ds}\left(\frac{\partial q^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)\right)\frac{\partial x^{\nu}}{\partial s} + \frac{\partial q^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{D}{ds}\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial s}\right)\right) = 0. \tag{42}$$

Pero la ecuación de la geodésica puede escribirse para cualquier vector

V^{μ}, y entonces

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) = 0. \tag{43}$$

Resulta así que

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{\partial q^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = 0. \tag{44}$$

Como se muestra en la Ref. [1], pueden describirse la gravitación y el electromagnetismo a partir de una nueva ecuación de campo covariante generalizada para q_{μ}:

$$R_{\mu} - \frac{1}{2} R q_{\mu} = k T_{\mu}. \tag{45}$$

.

4. Deducción de las Ecuaciones de Poisson y de Newton.

La ecuación de la gravitación de Poisson puede deducirse en forma directa en el límite del campo débil [1-4] a partir de la ecuación de onda para una eigenfunción, por ejemplo la Ec.(33), que puede escribirse como las dos ecuaciones:

$$(\Box + kT)q_o = 0, \tag{46}$$

$$(\Box + kT)q_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{47}$$

Utilizando

$$\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{48}$$

la Ec.(46) deviene

$$\nabla^2 q_o = kTq_o \tag{49}$$

para un q_o cuasi-estático. En el límite del campo débil [1-4]:

$$q_o = \epsilon + \eta_o = 1 + \eta_o, \quad \eta_o \ll 1, \tag{50}$$

donde ϵ_μ es el 4-vector unitario. Por lo que la Ec.(49) deviene

$$\nabla^2 \eta_o = kTq_o \sim kT. \tag{51}$$

Esta es la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \tag{52}$$

si

$$\Phi = \frac{1}{2}c^2\eta_o \tag{53}$$

es el potencial gravitacional, si

$$\rho = T = m/V \tag{54}$$

es la densidad de energía en reposo, y si G es la cte. gravitacional de Newton, relacionada con la cte. de Einstein por:

$$k = 8\pi G/c^2. \tag{55}$$

La ley de Newton, su teoría de gravitación universal, y la equivalencia de masa inercial y masa gravitacional, están todas contenidas en la condición de compatibilidad métrica

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial x^\nu} = -\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\, q^\lambda. \tag{56}$$

Multiplicando ambos lados de la Ec.(56) por $q\lambda$ y usando

$$\begin{aligned}\left(\Gamma^\mu{}_{\nu 0}\, q^0\right) q_0 &= \Gamma^\mu{}_{\nu 0}\,(q^0 q_0) = \Gamma^\mu{}_{\nu 0}\,,\\ \left(\Gamma^\mu{}_{\nu 1}\, q^1\right) q_1 &= \Gamma^\mu{}_{\nu 1}\,(q^1 q_1) = -\Gamma^\mu{}_{\nu 1}\,, \text{ etc.,}\end{aligned} \tag{57}$$

.

se obtiene una ecuación única para el símbolo de Christoffel en términos del vector métrico, irrespectivamente que esté libre o no de torsión el vector métrico:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu o} = -q_o \partial_\nu q^\mu, \quad \Gamma^{\mu}{}_{\nu i} = q_i \partial_\nu q^\mu, \quad i = 1, 2, 3. \tag{58}$$

(La conocida ecuación que relaciona el símbolo de Christoffel con el tensor métrico simétrico es más intrincado y menos útil, porque se deduce en base a la suposición de una métrica sin torsión, o sea que el símbolo de Christoffel es simétrico en sus dos índices inferiores. Es:

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} q^{\sigma\rho(S)} \left(\partial_\mu q_{\nu\rho}{}^{(S)} + \partial_\nu q_{\rho\mu}{}^{(S)} - \partial_\rho q_{\mu\nu}{}^{(S)} \right), \tag{59}$$

donde $q^{\sigma\rho(S)}$ es la inversa del tensor métrico simétrico. Los tensores métricos se definen por [2]

$$q^{\mu\nu(S)} q_{\nu\sigma}{}^{(S)} = \delta^\mu_\sigma, \tag{60}$$

donde

$$\delta^\mu_\sigma = \begin{cases} 1, & \mu = \sigma, \\ 0, & \mu \neq \sigma, \end{cases} \tag{61}$$

es la delta de Kronecker. En espacio-tiempo no euclideano, los elementos de $q^{\mu\nu}{}_{(S)}$ y $q_{\mu\nu}{}^{(S)}$ no son iguales en general [2].)

En el límite newtoniano, las velocidades de partículas son muy inferiores a c, o sea que [2-4]:

$$dx^i/d\tau \ll dt/d\tau \sim 1. \tag{62}$$

Utilizando la regla de la cadena para el lado izquierdo de la Ec.(56), con el tiempo propio τ como parámetro afín [2], se obtiene

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{d\tau}{dx^\nu} \frac{dq^\mu}{d\tau} \to \frac{1}{c} \frac{d\tau}{dt} \frac{dq^\mu}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dq^\mu}{dt}. \tag{63}$$

Consideremos la identidad obtenida de la ecuación de compatibilidad métrica, la Ec. (56):

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial x^\nu} := \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{64}$$

Usando la regla de la cadena en el límite de campo débil, el lado izquierdo de la Ec.(64) deviene

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial x^\nu} \to \frac{1}{c} \frac{\partial q^\mu}{\partial t}. \tag{65}$$

Si consideramos el 4-vector definido por

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{66}$$

entonces el vector métrico se define por $(q^0 := q^\mu(\mu = 0)$, etc.)

$$q^0 = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0}, \quad q^1 = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^1}, \quad q^2 = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^2}, \quad q^3 = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^3}; \tag{67}$$

.

entonces el lado izquierdo de la Ec.(64) deviene, para $\mu = 0$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial q^0}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial t^2} \tag{68}$$

en el campo débil o límite newtoniano. En este límite puede considerarse la métrica como una perturbación de la métrica del espacio-tiempo plano [2]:

$$q^0 = \left(1 - \frac{1}{2}\eta^0\right) \sim 1. \tag{69}$$

El campo gravitacional en el límite newtoniano es cuasi-estático, y el vector posición se ve dominado por su componente temporal, de manera que

$$\frac{\partial q^0}{\partial x^\nu} \to -\frac{1}{2}\frac{\partial \eta^0}{\partial x^\nu}. \tag{70}$$

Igualando los lados izquierdo y derecho de la identidad (64), da, en la aproximación newtoniana,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial \eta^0}{\partial x^i}, \tag{71}$$

que es la segunda ley de Newton combinada con la teoría newtoniana de gravitación universal. Se ve que la equivalencia de masa gravitacional e inercial implícita en la Ec. (71) es una consecuencia de identidad geométrica (64). Este es un resultado poderoso y original, obtenido de la nueva ecuación de compatibilidad métrica (56).

Usando la definición (53) para el potencial newtoniano Φ, la Ec.(71) puede escribirse en la conocida forma

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi, \tag{72}$$

que es equivalente a la ley del cuadrado de la inversa de Newton

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{k}. \tag{73}$$

De la Ec.(56) con $\mu = 0$, puede verse que la Ec.(72) puede expresarse como un símbolo de Christoffel:

$$\frac{\partial q^0}{\partial x^\nu} = -\Gamma^0{}_{\nu 0}\, q^0 \sim -\Gamma^0{}_{\nu 0}\,, \tag{74}$$

una ecuación que muestra que la equivalencia entre masa gravitacional y masa inercial es un resultado geométrico, la ecuación de compatibilidad métrica, (56), que también conduce a la ecuación de onda covariante generalizada (33), y consistentemente, a la Ec.(52) de Poisson en la aproximación newtoniana. Si escribimos la Ec. (28) como

.

$$(\Box + kT)g_{\mu\nu} = 0, \tag{75}$$

o sea, usando la notación tradicional $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}{}^{(S)}$ para la métrica simétrica, el campo débil o aproximación newtoniana da

$$(\Box + km/V)\, g_{oo} = 0, \tag{76}$$

donde $T = m/V$. Si se considera a g_{oo} como cuasi-estático, la Ec.(76) se reduce a

$$\nabla^2 g_{oo} = kTg_{oo}. \tag{77}$$

Usando la aproximación del campo débil

$$g_{oo} = 1 - h_{oo} \sim 1 \tag{78}$$

Para la métrica simétrica, obtenemos la ecuación de Carroll (36) [2] (la ecuación de campo de Einstein en el límite del campo débil):

$$\nabla^2 h_{oo} = -kTg_{oo} = -kT_{oo}, \tag{79}$$

que es la ecuación de Poisson (52) con $h_{oo} = -c^2\Phi/2, \quad k = 8\pi G/c^2, \quad T_{oo} = m/V$. Por lo tanto, la ecuación de onda (28)es la eigenecuación que corresponde a la ecuación clásica de campo de Einstein. Einstein [4] llegó a la aproximación (79) a través de una ecuación intermedia (la Ec.(89b) de la Ref.[4]):

$$\Box\gamma_{\mu\nu} = 2kT^*_{\mu\nu}, \quad T^*_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T, \tag{80}$$

en la cual el tensor métrico se aproximó mediante [4]:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}. \tag{81}$$

Usando la definición

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \tag{82}$$

se obtiene una expresión para $T_{\mu\nu}$ en términos de T:

$$g_{\mu\nu}T = (g_{\mu\nu}g^{\mu\nu})T_{\mu\nu} = 4T_{\mu\nu}. \tag{83}$$

Por lo tanto, la Ec.(80) puede expresarse como la eigenecuación

$$\left(\Box + \frac{1}{2}kT\right) g_{\mu\nu} = 0, \tag{84}$$

que es la ecuación de onda (28) excepto por el factor (1/2) que viene del método de la aproximación utilizado por Einstein.

Utilizando el límite del campo débil de la Ec.(33), se obtiene

$$(\Box + km/V)\, q_0 = 0, \tag{85}$$

.

donde $T = mc^2/V$ es una vez más la densidad de energía en reposo. Identificando q_0 como el campo escalar [5] identifica la Ec.(85) como la ecuación de onda de la partícula individual, que luego de cuantización puede interpretarse como la ecuación de Klein-Gordon [5], cuya función de onda se identifica con q_0 en la aproximación de campo débil. La ecuación de Klein-Gordon es

$$\left(\Box + m^2c^2/\hbar^2\right) q_0 = 0, \tag{86}$$

asi que

$$E_0 = mc^2 = \frac{m^2c^4V}{\hbar^2 k}. \tag{87}$$

La Ec.(87) puede identificarse como el postulado de Planck/de Broglie para cualquier partícula:

$$E_0 = \hbar\omega_0 = mc^2, \tag{88}$$

donde ω_0 es la frecuencia en reposo de cualquier partícula. La frecuencia en reposo se define por

$$\omega_0 = 8\pi c\ell^2/V, \tag{89}$$

donde

$$\ell = (G\hbar/c^3)^{1/2} \tag{90}$$

es la longitud de Planck. La Ec.(87) significa que el producto de la masa en reposo m y el volumen de reposo V de toda partícula es una constante universal

$$mV = \hbar^2 k/c^2, \tag{91}$$

que es un resultado importante de la ecuación de onda covariante generalizada.

Usando la equivalencia de operador de la mecánica cuántica [5]

$$p^\mu = i\hbar\partial^\mu,$$

$$p^\mu = (En/c, \boldsymbol{p}), \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right), \tag{92}$$

la Ec. (86) deviene la ecuación de Einstein de la relatividad restringida:

$$p^\mu p_\mu = \frac{En^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2, \tag{93}$$

en donde En denota la energía total (cinética mas potencial) y mc^2 es la energía en reposo. A partir de la ecuación [18]

$$\boldsymbol{F} = \gamma m\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{p}}, \tag{94}$$

donde $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ es el momento en el límite de relatividad restringida (límite de campo débil), se obtiene una expresión para la energía cinética en relatividad restringida:

$$T = mc^2(\gamma - 1). \tag{95}$$

En el límite no relativista $v \ll c$, la energía cinética newtoniana

.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{96}$$

se obtiene de la segunda ley de Newton, la Ec. (73), que es consistentemente el límite no relativista de campo débil de la Ec. (33). Usando la equivalencia de operador (92) en la Ec.(96) da la ecuación de Schroedinger dependiente del tiempo y de la partícula libre [5,19]:

$$i\hbar\frac{\partial q_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}q_0. \tag{97}$$

Identificando el operador de Hamilton como

$$H = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} \tag{98}$$

transforma la Ec.(97) en una ecuación de Schroedinger dependiente del tiempo y para partícula libre

$$Hq_0 = Tq_0, \tag{99}$$

que es una aproximación de campo débil a la ecuación de onda (33) cuando sólo consideramos energía cinética [5]. La función de onda de la ec. de Schroedinger (99) es [19]

$$q_0 = 1 + Ae^{iKZ} + Be^{-iKZ}, \tag{100}$$

que el el componente temporal de la eigenfunción de la métrica de la Ec.(33) en la aproximación de campo débil usada para recuperar la Ec.(99).

Estos métodos ilustran que la mecánica ondulatoria o cuántica puede considerarse como un producto de la relatividad general, y que la función de onda puede considerarse una propiedad determinista de la relatividad general, en especial un 4-vector métrico, un tensor métrico, o más generalmente un vielbein.

La primera ley de Newton se obtiene en el límite de campo débil de la ecuación de la geodésica, o alternativamente cuando el símbolo de Christoffel $\Gamma_{\nu\ 0}^{\ 0}$ en la Ec.(74) desaparece. Estos límites corresponden al espacio-tiempo plano en el cual no hay aceleración. La ley de Newton está contenida dentro de la ley de conservación para q_μ. Esta última puede deducirse a partir de la identidad de Bianchi [2]

$$D^\mu G_{\mu\nu} := 0, \tag{101}$$

donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \tag{102}$$

es el tensor de Einstein. El teorema de Noether da la ley de conservación de energía

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{103}$$

y la suposición de compatibilidad métrica de la relatividad general tradicional [2] es

$$D^\rho g_{\mu\nu} = 0. \tag{104}$$

Si definimos [1]

.

$$R_{\mu\nu} := R_\mu q_\nu, \quad T_{\mu\nu} := T_\mu q_\nu, \quad g_{\mu\nu} = q_\mu q_\nu, \tag{105}$$

entonces la identidad de Bianchi (101) deviene

$$\begin{aligned} D^\mu G_{\mu\nu} &= (D^\mu R_\mu)q_\nu + R_\mu(D^\mu q_\nu) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}Rq_\mu D^\mu q_\nu - \tfrac{1}{2}D^\mu(Rq_\mu)q_\nu \\ &:= 0. \end{aligned} \tag{106}$$

Usando la suposición de compatibilidad métrica para q_ν, la Ec. (32), da

$$D^\mu G_\mu = 0, \quad G_\mu := R_\mu - \frac{1}{2}Rq_\mu. \tag{107}$$

Esta es la identidad de Bianchi para el tensor de campo:

$$G_\mu = kT_\mu. \tag{108}$$

Usando la Ec.(103) y el teorema de Leibniz, la conservación de energía deviene

$$\begin{aligned} D^\mu(T_\mu q_\nu) &= (D^\mu T_\mu)q_\nu + T_\mu(D^\mu q_\nu) \\ &= (D^\mu T_\mu)q_\nu = 0, \end{aligned} \tag{109}$$

y la ley de conservación de energía para T_μ se deduce como

$$D^\mu T_\mu = 0. \tag{110}$$

La ecuación de campo unificado (45) [1] deviene

$$D^\mu(G_\mu - kT_\mu) := 0. \tag{111}$$

Usando las ecuaciones [1]:

$$R_\mu = \frac{1}{4}Rq_\mu, \tag{112}$$

tanto la ley de conservación de energía (110) y la identidad de Bianchi (107) pueden expresarse como la ecuación

$$\left(D^\mu + \frac{1}{R}D^\mu R\right)q_\mu = 0. \tag{113}$$

5. Algunas ecuaciones fundamentales de la física deducidas de la ecuación de onda.

La Ec.(113) es similar en estructura a una ecuación de transformación de gauge según la teoría de campo gauge genérica [2,5,7-12]. Al usar los resultados [2]

.

$$D_\mu R = \partial_\mu R, \tag{114}$$

$$\begin{aligned} D_\mu q^\mu &= \partial_\mu q^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}\, q^\lambda = \tfrac{1}{\sqrt{|q|}}\partial_\mu(\sqrt{|q|}q^\mu), \\ &= \partial_\mu q^\mu + \left(\tfrac{1}{\sqrt{|q|}}\partial_\mu\sqrt{|q|}\right) q^\mu, \end{aligned} \tag{115}$$

donde $|q|$ es el módulo del determinante de la métrica simétrica $g_{\mu\nu} := q_\mu q_\nu$, Ec. (113) deviene

$$\left(\partial_\mu + \frac{1}{\sqrt{|q|}}\partial_\mu\sqrt{|q|} + \frac{1}{R}\partial_\mu R\right) q^\mu = 0, \tag{116}$$

un resultado generado por el teorema de Leibniz [2]

$$D_\mu(Rq^\mu) = (D_\mu R)q^\mu + R(D_\mu q^\mu) = 0. \tag{117}$$

Consideramos ahora la definición de transformación gauge en teoría de campo gauge genérico [5]:

$$\psi' = S\psi \tag{118}$$

donde ψ es el campo gauge genérico (n-dimensional) y S el generador de rotación en n dimensiones. La aplicación del teorema de Leibniz produce

$$D_\mu(S\psi) = (D_\mu S)\psi + S(D_\mu\psi). \tag{119}$$

La derivada covariante en teoría de campo gauge genérico se define mediante un vielbein [2], el potencial gauge genérico $A^a{}_\mu$, y un factor g (denotando carga genérica):

$$D_\mu := \partial_\mu - igA^\mu, \quad A_\mu := m^a A^a{}_\mu; \tag{120}$$

y la transformación gauge (118) implica que

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{i}{gS}\partial_\mu S, \tag{121}$$

o sea,

$$igA'_\mu = igA_\mu + \frac{1}{S}\partial_\mu S. \tag{122}$$

El factor $-i$ en la Ec. (120) se origina en el hecho de que los generadores de grupo gauge m_a en teoría de campo gauge genérico se definen como matrices con valores imaginarios. Este procedimiento define el índice superior a del vielbein $A^a{}_\mu$ [2]. Sin embargo, siempre puede hallarse una base para los generadores de grupo gauge de modo que la Ec.(120) deviene

$$D_\mu = \partial_\mu + gA_\mu. \tag{123}$$

Comparando las Ecs. (123) y (116),

$$A_\mu = \frac{1}{g}\cdot\frac{1}{R}\partial_\mu R = \frac{\hbar}{e}\cdot\frac{1}{R}\partial_\mu R = B^{(0)}\partial_\mu R, \tag{124}$$

.

donde $\hbar/e$ es el elemento unitario del flujo magnético (el fluxón) y donde $B^{(0)}$ es una densidad de flujo magnético. La Ec.(124) combina la equivalencia de operador (92) de mecánica cuántica con la prescripción mínima ($p^\mu = eA^\mu$) en teoría de campo gauge genérica, dando el resultado

$$p^\mu = eA^\mu = i\hbar\partial^\mu. \tag{125}$$

Este resultado se obtuvo de la ecuación de onda (33) y de la identidad de Bianchi (107) en relatividad general. Comparando las Ecs. (117) y (119) se observa que la curvatura escalar $R = -kT$ en relatividad general juega al papel del generador de rotación S en teoría de campo gauge genérico, y que la métrica q_μ juega el rol del campo genérico A_μ , o potencial. El campo puede ser un campo escalar, como en la ecuación de onda de la partícula individual, la de Klein-Gordon, y la de Schroedinger (Sec. 4), pero también puede ser un espinor, como en la ec. de Dirac, y de un 4-vector como en las ecuaciones de Proca, de d'Alembert, y de Poisson de la electrodinámica. Se ha demostrado en secciones previas que, en gravitación, el campo puede ser un 4-vector, un tensor simétrico y anti-simétrico y, en forma más general, un vielbein [2]. En la electrodinámica $O(3)$ [7-12] el campo o potencial (la "influencia universal" de Feynman [5]) es el vielbein $A^a{}_\mu$, donde el índice superior denota la base circular compleja euclideana [2] ((1),(2),(3)) necesaria para la descripción de polarización circular en radiación. El índice inferior denota el espacio-tiempo no euclidiano en relatividad general. El índice superior *a* es una base para el paquete tangente de la relatividad general; y su ahora efectuamos el *ansatz* (estimación inicial)

$$A^a{}_\mu = A^{(0)} q^a{}_\mu = A^{(0)} e^a{}_\mu, \tag{126}$$

Identificamos el índice interno de un campo o potencial o "influencia universal" en teoría decampo gauge, con índice base del espacio tangencial [2] en relatividad general. Esta identificación es la clave para la unificación de campo en la nueva ecuación de onda (25). Enotras palabras, se logra la unificación de campos seleccionando la eigenfunción de la ecuaciónde onda para representar los diferentes campos que se cree actualmente existen en lanaturaleza: campos escalares, campos vectoriales, campos de tensores simétricos o anti-simétricos, campos de espinores, y en forma más general vielbeins. El campo débil es unvielbein cuyo índice interno SU (2) describe los tres bosones de campo débil masivos [5], y elcampo fuerte es un vielbein cuyo índice interno SU (3) representa gluones. El índice internodelcampo débil, por lo tanto, representa un espacio tangencial físico de la relatividad general,cuyaestructura de grupo es SU (2), homomórfica con el grupo de estructura O(3) dela electrodinámica O(3) [7-12]. El paquete de fibras para ambos campos se identifica, por lo tanto,con el paquete tangente. En electrodinámica O (3), las fibras están atadas con rotaciones en tresdimensiones, representadas por el grupo de estructura SO(3) y el campo se define en esta tangente o paquete de fibra mediante el vielbein A^a_μ . En teoría de campo débil se sigue precisamente el mismo procedimiento, pero el grupo de estructura deviene $SU(2)$, y el campo deviene el vielbein $W^a{}_\mu$ cuyos tres índices internos representan los tres bosones de campo débil masivos. En teoría de campo fuerte, el grupo de estructura es $SU(3)$ y el vielbein deviene $S^a{}_\mu$, donde hay ocho índices *a* [5].

.

Por lo tanto, el *ansatz* (126) implica que los bosones masivos del campo débil y los gluones del campo fuerte son diferentes manifestaciones de los fotones con índices (1), (2), y (3) de la electrodinámica $O(3)$. Los fotones $O(3)$, los bosones del campo débil y los gluones se describen con la Ec.(25) en la que las eigenfunciones son, respectivamente, ${A^a}_\mu, {W^a}_\mu$, y ${S^a}_\mu$, o sea, por las tres ecuaciones de onda de la relatividad general

$$(\Box + kT){A^a}_\mu = 0, \tag{127}$$

$$(\Box + kT){W^a}_\mu = 0, \tag{128}$$

$$(\Box + kT){S^a}_\mu = 0. \tag{129}$$

En otras palabras, los índices internos del $O(3)$, los campos débil y fuerte son diferentes representaciones de la base usada para representar el espacio tangente en relatividad general. El campo electromagnético $O(3)$ se representa por un vielbein en el que el espacio tangente se define en la base circular compleja ((1),(2),(3)) de simetría $O(3)$ [7-12]. Esta base para el vielbein del campo débil deviene las tres matrices $SU(2)$ (matrices de Pauli), y hay ocho matrices de simetría $SU(3)$ (generalizaciones geométricas [5] de las tres matrices complejas de Pauli de 2 x 2 a ocho matrices complejas de 3 x 3). Estas diferentes representaciones de bases son todas representaciones del mismo espacio tangente físico en relatividad general.

En la convención actualmente aceptada del modelo tradicional y en la gran teoría del campo unificado, se representa el sector electromagnético por el campo o potencial A_μ, en el cual no hay índice interno, y el paquete de fibras abstracto de la teoría de campo gauge no se identifica con el paquete tangente físico de la relatividad general. En consecuencia, el modelo tradicional sufre de las inconsistencias descritas en la introducción, siendo la más seria de las mismas que el Principio de Relatividad General no se cumple en la convención actualmente aceptada conocida como el "modelo tradicional"; el Principio se aplica al campo gravitacional en el modelo tradicional pero no a los campos electromagnético, débil y fuerte.

En electrodinámica $O(3)$, el *ansatz* (126) implica que

$$A_\mu = A^{(0)} q_\mu = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{R} \partial_\mu R \tag{130}$$

(donde la magnitud escalar $A^{(0)}$ y el operador diferencial ∂_μ son iguales para los tres índices a). Si suponemos que, para cada índice a

$$q_\mu = \frac{ds}{dx^\mu}, \tag{131}$$

entonces el *ansatz* (126) implica que

$$s = \frac{1}{gA^{(0)}} = \frac{1}{\kappa}. \tag{132}$$

.

Para cada índice a la ecuación de la geodésica para la electrodinámica $O(3)$ [7-12] deviene

$$\frac{d\kappa^\mu}{ds} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\,\kappa^\nu\kappa^\sigma = 0, \quad \kappa^\mu = \frac{dq^\mu}{ds}, \tag{133}$$

una ecuación que define la propagación, o camino tomado en el espacio-tiempo non-euclideano, por los tres fotones (1), (2), y (3) de electrodinámica $O(3)$.

La ecuación de onda (25) deviene la ecuación de d'Alembert de electrodinámica $O(3)$ [7-12]

$$\Box A^a{}_\mu = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^a{}_\mu \tag{134}$$

si definimos la 4-densidad de corriente por el vielbein

$$j^a{}_\mu = c^2 \epsilon_0 k T A^a{}_\mu . \tag{135}$$

la Ec.(134) representa tres ecuaciones de onda [7-12], una para cada fotón, con indice (1), (2), y (3):

$$\Box A^{(1)}{}_\mu = -\tfrac{1}{\epsilon_0 c^2} j^{(1)}{}_\mu , \tag{136}$$

$$\Box A^{(2)}{}_\mu = -\tfrac{1}{\epsilon_0 c^2} j^{(2)}{}_\mu , \tag{137}$$

$$\Box A^{(3)}{}_\mu = -\tfrac{1}{\epsilon_0 c^2} j^{(3)}{}_\mu , \tag{138}$$

dos fotones transversos, (1) y (2), y uno longitudinal (3). Estas tres ecuaciones son evidentemente de relatividad general, y son también ecuaciones de onda gravitacionales multiplicadas de cada lado por la magnitud C escalar negativa $A^{(0)}$. Se deduce de la discusión anterior que estas ecuaciones de onda son también ecuaciones de los campos débil y fuerte, con $A^a{}_\mu$ reemplazada, respectivamente por $W^a{}_\mu$ y $S^a{}_\mu$. El límite de campo débil aplicado a la Ec.(127) produce tres ecuaciones de Proca [5,7-12], una para cada fotón (o sea para cada índice a = (1), (2) y (3):

$$\left(\Box + m^2c^2/\hbar^2\right) A^{(i)}{}_\mu = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{139}$$

y este procedimiento también produce el postulado de Planck/de Broglie (95) aplicado al fotón, identificando así al fotón como una partícula con masa. En el límite de la electrostática, obtenemos a partir de la Ec.(127) la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 A_0 = -RA_0 = kTA_0, \tag{140}$$

que muestra que la fuente de potencial escalar A_0 es la curvatura escalar R. Este resultado pareciera ser una indicación importante del hecho de que la corriente eléctrica puede obtenerse de la curvatura escalar del espacio-tiempo no euclidiano, o sea que la energía electromagnética puede obtenerse del espacio-tiempo no euclidiano a través de dispositivos tales como el generador electromagnético fijo [12].

La identificación del campo electromagnético $O(3)$ como un vielbein implica que los vectores unitarios $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}$ o de la base descrita por los índices latinos superiores

.

a del vielbein son vectores ortonormales de un espacio tangente euclideano a la variedad base (espacio-tiempo no euclidiano) descrito por el índice griego inferior μ del vielbein. Los vectores unitarios definen las ecuaciones cíclicas con simetría $O(3)$ [7-12]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{(1)} \times \boldsymbol{e}^{(2)} &= i\boldsymbol{e}^{(3)*}, \\ \boldsymbol{e}^{(2)} \times \boldsymbol{e}^{(3)} &= i\boldsymbol{e}^{(1)*}, \\ \boldsymbol{e}^{(3)} \times \boldsymbol{e}^{(1)} &= i\boldsymbol{e}^{(2)*}, \end{aligned} \tag{141}$$

y pueden utilizarse para definir una tangente en cualquier punto p de una curva en el espacio-tiempo no euclidiano utilizado para definir la variedad base. Los vectores unitarios de base se definen en términos de los vectores unitarios cartesianos del espacio tangente por [7-12]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{(1)} &= (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{i} - i\boldsymbol{j}), \\ \boldsymbol{e}^{(2)} &= (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{i} + i\boldsymbol{j}), \\ \boldsymbol{e}^{(3)} &= \boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{142}$$

Se deduce que el campo electromagnético $O(3)$ se define en términos de los vectores métricos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{(1)} &= A^{(0)}/\sqrt{2}(\boldsymbol{i} - i\boldsymbol{j})e^{i\phi} = A^{(0)}\boldsymbol{q}^{(1)}, \\ \boldsymbol{A}^{(2)} &= A^{(0)}/\sqrt{2}(\boldsymbol{i} + i\boldsymbol{j})e^{-i\phi} = A^{(0)}\boldsymbol{q}^{(2)}, \\ \boldsymbol{A}^{(3)} &= A^{(0)}\boldsymbol{k} = A^{(0)}\boldsymbol{q}^{(3)}, \end{aligned} \tag{143}$$

donde φ es la fase electromagnética. Los vectores unitarios $\boldsymbol{e}^{(1)}$ y $\boldsymbol{e}^{(2)}$ pueden verse como vectores tangentes en un círculo, como se ilustra en el siguiente diagrama de Argand:

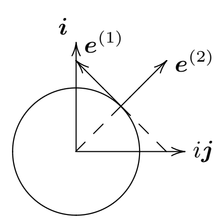

Fig. 1. Vectores tangentes

Estos vectores tangentes son vectores del espacio tangente a la variedad base.
Si escribimos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}^{(1)'} &= \boldsymbol{q}^{(2)'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}\cos\phi + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\phi), \\ \boldsymbol{q}^{(1)''} &= -\boldsymbol{q}^{(2)''} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,\phi - \boldsymbol{j}\cos\phi), \end{aligned} \tag{144}$$

.

puede verse en el siguiente diagrama que los vectores métricos son vectores tangentes que rotan alrededor de un círculo para cualquier punto dado Z:

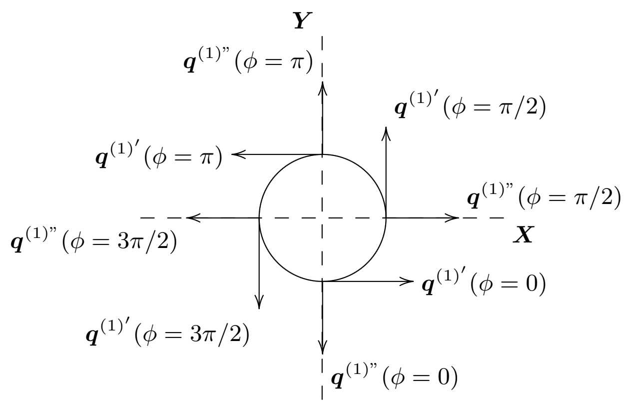

Fig. 2. Vectores tangentes en rotación.

A medida que avanzamos a lo largo del eje Z, que define el vector unitario $\boldsymbol{e}^{(3)}$ ortonormal a $\boldsymbol{e}^{(1)}$ y $\boldsymbol{e}^{(2)}$, el sendero que marca es una hélice, y ésta es la geodésica (sendero de propagación) para la radiación $O(3)$.

Habiendo reconocido que el campo electromagnético $O(3)$ se define mediante un vielbein en la Ec.(25), se vuelve posible definir componentes del campo electromagnético con valor escalar (y campos escalares en general) como componentes con valor escalar del vielbein, tales como:

$$\begin{aligned} &q^{(1)}{}_X = (1/\sqrt{2})e^{i\phi}, \quad q^{(1)}{}_Y = -(1/\sqrt{2})e^{i\phi}, \\ &q^{(2)}{}_X = (1/\sqrt{2})e^{-i\phi}, \quad q^{(2)}{}_Y = (1/\sqrt{2})e^{-i\phi}, \\ &q^{(3)}{}_Z = 1. \end{aligned} \tag{145}$$

Estos componentes escalares del vielbein son componentes del vector del espacio tangente:

$$\boldsymbol{q}_\mu = q^{(1)}{}_\mu \boldsymbol{e}^{(1)} + q^{(2)}{}_\mu \boldsymbol{e}^{(2)} + q^{(3)}{}_\mu \boldsymbol{e}^{(3)}, \tag{146}$$

que se define por los tres 4-vectores [7-12] en la variedad base $q^{(1)}{}_\mu$, $q^{(2)}{}_\mu$, $q^{(3)}{}_\mu$, un 4-vector para cada índice $a = (1), (2)$ y (3). Los componentes del campo electromagnético $O(3)$ son, por lo tanto

$$A^{(1)}{}_\mu = A^{(0)} q^{(1)}{}_\mu, \tag{147}$$

$$A^{(2)}{}_\mu = A^{(0)} q^{(2)}{}_\mu, \tag{148}$$

.

$$A^{(3)}{}_{\mu} = A^{(0)} q^{(3)}{}_{\mu}, \tag{149}$$

dos transversales (a = (1) y (2)) y uno longitudinal (a = (3)).

El vielbein es un objeto bien definido en geometría diferencial [2] y puede emplearse, por ejemplo, para generalizar la geometría de Riemann a través de las ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan. La gran similitud de la teoría del vielbein con la teoría gauge también se comprende claramente en matemáticas [2], pero en la convención actualmente aceptada del modelo tradicional no se ha utilizado el vielbein porque no se ha efectuado la identificación del paquete de fibras de la teoría del campo gauge como el paquete tangente de la relatividad general. En esta sección identificamos el índice interno de la electrodinámica $O(3)$ con el espacio tangente de la relatividad general, mediante la identificación de a con los índices (1), (2), y (3). Esta identificación permite el empleo de resultados de la teoría de vielbein y de la geometría diferencial para la teoría de campo unificado, o sea tanto para relatividad general como para teoría gauge. Por ejemplo, el campo gauge $O(3)$ se define mediante [2]:

$$\begin{aligned} G^{a}{}_{\mu\nu} &= (dA)^{a}{}_{\mu\nu} + (\omega \wedge A)^{a}{}_{\mu\nu} \\ &= \partial_{\mu} A^{a}{}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{a}{}_{\mu} + \omega^{a}{}_{\mu b} A^{b}{}_{\nu} - \omega^{a}{}_{\nu b} A^{b}{}_{\mu}, \end{aligned} \tag{150}$$

que es una derivada exterior covariante en geometría diferencial. En la Ec. (150) $\omega^{a}{}_{\mu b}$ es una conexión afín al espín. En teoría de campo gauge, el campo gauge electromagnético $O(3)$ se define mediante el conmutador-invariante-gauge de derivadas covariantes [5,7-12]:

$$\begin{aligned} G^{a}{}_{\mu\nu} = \tfrac{i}{g}[D_{\mu}, D_{\nu}] = \partial_{\mu} A^{a}{}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{a}{}_{\mu} \\ + g(A^{b}{}_{\mu} A^{c}{}_{\nu} - A^{b}{}_{\nu} A^{c}{}_{\mu}). \end{aligned} \tag{151}$$

Una comparación de las Ecs.(150) y (151) define la conexión afín al espín en términos de los campos $O(3)$ o potenciales vectoriales:

$$\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} A^{b}_{\nu} - \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} A^{b}{}_{\mu} = g(A^{b}{}_{\mu} A^{c}{}_{\nu} - A^{b}{}_{\nu} A^{c}{}_{\mu}) = g\epsilon_{abc} A^{b}{}_{\mu} A^{c}{}_{\nu}. \tag{4.152}$$

Así, el campo o potencial o "influencia universal" $A^{a}{}_{\mu}$ se ha definido en esta sección en términos de la curvatura escalar en relatividad general y también en términos de las conexiones afines al espín. El campo gauge $G^{a}{}_{\mu\nu}$ es invariante bajo la transformación gauge (128); o sea, si

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - \frac{i}{g}\frac{1}{S}\partial_{\mu} S, \tag{153}$$

el campo gauge no sufre cambios. Este resultado se cumple para los cuatro campos. En gravitación el equivalente del campo gauge es el tensor de Riemann, que es covariante bajo transformación de coordenadas, mientras que el símbolo de Christoffel no es covariante bajo transformaciones de coordenadas porque no es un tensor [2].

Algunos poderosos resultados de la teoría del vielbein pueden traducirse directamente al lenguaje de la teoría de campo unificado desarrollada en este documento, por ejemplo la

.

electrodinámica $O(3)$. La primera de las relaciones estructrales de Maurer-Cartan [2] de la geometría diferencial es

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge e^b \tag{154}$$

y establece que la derivada exterior covariante de la forma de torsión T^a (lado izquierdo de la Ec.(154) es el producto cuña de la forma de Riemann $R^a{}_b$ y la forma de vielbein e^b (lado derecho de la Ec.(154)). La Ec.(154) es la ecuación de campo no homogénea de la electrodinámica $O(3)$:

$$D_\mu G^{\mu\nu,a} = \frac{1}{\mu_0} j^{\nu,a}, \tag{155}$$

Donde el vielbein de la densidad de carga-corriente se define con la Ec.(135) de esta sección. Las Ecs.(154) y (155) son ecuaciones de teoría de campo unificado–la forma de torsión T^a representa el electromagnetismo (o los campos débil y fuerte), y la forma de Riemann $R^a{}_b$ representa la gravitación. En la Ref. (1) la ecuación no homogénea (153) se infirió a partir de la Ec.(45) al multiplicarla de ambos lados por la cuña $\wedge A^\mu{}_\nu$, y definiendo el tensor del campo electromagnético como

$$G_{\mu\nu} = G^{(0)}(R_\mu \wedge q_\nu - \frac{R}{2} q_\mu \wedge q_\nu) \tag{156}$$

y la densidad de carga corriente como

$$j^\nu = \mu_0 G^{(0)} k D_\mu (T^\mu \wedge q^\nu). \tag{157}$$

El campo gravitacional y el tensor de Riemann se definieron [1] multiplicando la nueva ec.de campo (45) de ambos lados por q_v, de manera que la Ec.(45), el análogo clásico de la ecuación de onda (25) es una ecuación de teoría de campo unificado.

La segunda relación estructural de Maurer-Cartan es la identidad de Bianchi, y que se traduce en la identidad de Bianchi de la gravitación [2, 5], y también en la identidad (107) usada en la Sec. 4 para deducir la ecuación de invariancia gauge (113). En electrodinámica $O(3)$ deviene la ecuación de campo homogénea [1], la identidad de Jacobi

$$D_\mu \widetilde{G}^{\mu\nu,a} := 0, \tag{158}$$

donde $\widetilde{G}^{\mu\nu,a}$ es el dual [5,7-12] de $G^a{}_{\mu\nu}$.

El postulado de la tétrada de la teoría vielbein, la Ec.(6), se traduce en las relaciones cíclicas de simetría $O(3)$

$$\begin{aligned} \partial_i \boldsymbol{q}^{(1)*}{}_j &= -i\kappa \boldsymbol{q}^{(2)}{}_i \times \boldsymbol{q}^{(3)}{}_j, \\ \partial_i \boldsymbol{q}^{(2)*}{}_j &= -i\kappa \boldsymbol{q}^{(3)}{}_i \times \boldsymbol{q}^{(1)}{}_j, \\ \partial_i \boldsymbol{q}^{(3)*}{}_i &= -i\kappa \boldsymbol{q}^{(1)}{}_i \times \boldsymbol{q}^{(2)}{}_j \end{aligned} \tag{159}$$

entre índices espaciales de la variedad base ($\mu = i = 1, 2, 3$).

.

En esta sección el campo gauge electromagnético $O(3)$ se ha identificado de tres maneras: las Ecs.(150), (151), y (156). La consistencia interna demanda que estas tres definiciones sean iguales, dando la Ec.(152), por ejemplo. Esta ecuación relaciona la conexión afín al espín y el potencial vectorial. Comparando las Ecs. (151) y (156) da el importante resultado

$$G^{(0)}\left(R_\mu \wedge q_\nu - \frac{R}{2} q_\mu \wedge q_\nu\right) = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + g\epsilon_{abc} A^b{}_\mu A^c{}_\mu, \qquad (160)$$

que indica que la estructura de grupo de la electrodinámica covariante generalizada es no abeliana y que la electrodinámica covariante generalizada debe ser una teoría de campo gauge con un grupo gauge interno tal como el $O(3)$, de simetría mayor que la convencional $U(1)$ del modelo tradicional. El producto cuña $R_\mu \wedge q_\nu$ se identifica entonces como

$$R_\mu \wedge q_\nu = \frac{1}{G^{(0)}}\left(\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu\right) \qquad (161)$$

y el producto cuña $q_\mu \wedge q_\nu$ como

$$\frac{R}{2} q_\mu \wedge q_\nu = -\frac{g}{G^{(0)}} \epsilon_{abc} A^b{}_\mu A^c{}_\nu. \qquad (162)$$

Si la electrodinámica fuese una teoría abeliana $U(1)$, entonces el producto cuña $q_\mu \wedge q_\nu$ sería cero:

$$q_\mu \wedge q_\nu = q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu = 0. \qquad (163)$$

El campo electromagnético entonces desaparecería porque [1]

$$R_\mu = \frac{1}{4} R q_\mu. \qquad (164)$$

El postulado de la tétrada en teoría de campo gauge con simetría $U(1)$ se reduciría a

$$D_\mu q_\nu = (\partial_\mu - igA_\mu) q_\nu = (\partial_\mu - igA^{(0)} q_\mu) q_\nu = 0. \qquad (165)$$

El campo gauge $U(1)$ sería entonces

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = igA^{(0)2}(q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu) = 0 \qquad (166)$$

y desaparecería, un resultado consistente con la Ec.(164). Se concluye que *la relatividad general implica una electrodinámica de mayor simetría*, un resultado crucial para el desarrollo de una teoría de campo unificado.

Finalmente en esta sección utilizamos otro resultado importante de la teoría vielbein para deducir la ecuación de Dirac a partir de la ecuación de onda (25): el vielbein permite el desarrollo de espinores en un espacio-tiempo no abeliano. Cada componente del espinor debe cumplir con la ec. de Klein-Gordon (Ref. [5], p. 45). La ecuación de Klein-Gordon se obtiene de la ecuación de onda (25) al considerar los cuatro componentes escalares del vielbein (hay cuatro componentes

.

para cada índice a). Las soluciones de la ecuación de Dirac para una partícula en reposo son las soluciones positiva y negativa, respectivamente,

$$\psi = u(0)\exp(-imt), \quad \psi = v(0)\exp(imt). \tag{167}$$

Los dos espinores positivo de energía y negativo de energía en este límite devienen

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{168}$$

y estos se identifican como componentes del vielbein. Se obtuvo la ecuación de Dirac de la ecuación de onda (25), que usa el vielbein como eigenfunción.

6. Discusión

La clave para la unificación de campos (unificación de relatividad y teoría gauge) en este documento es la comprensión de que el índice interno (índice de paquete fibroso) de la teoría gauge es el índice del paquete tangente de la relatividad general. La geometría fundamental muestra que este índice interno está presente en relaciones básicas, como la de entre vectoresunitarios cartesianos en el espacio-tiempo euclidiano, $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ en permutación cíclica. Se asume implícitamente la existencia de este índice interno en la geometría cotidiana del espacio plano, pero es la clave para comprender que la eigenfunción más general para la función de onda (25) debe ser un vielbein. Los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (ó $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}$ de la base circular compleja) son generalmente vielbeins.

Se deduce en electrodinámica covariante generalizada que el campo A^a_μ también es un vielbein, y que la simetría de grupo gauge de la electrodinámica debe ser $O(3)$ o mayor. La existencia de una teoría de campo gauge $U(1)$ queda prohibida por la geometría fundamental, porque en tal teoría falta el índice interno del vielbein. Esto es geométricamente incorrecto. Estos resultados se demuestran como sigue.

Consideremos el vector de desplazamiento [1, 14, 15] en las 3 dimensiones del espacio euclidiano:

$$\boldsymbol{r} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \tag{169}$$

Los vectores unitarios cartesianos son

$$\boldsymbol{i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X} \Big/ \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X}\right|, \quad \boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Y} \Big/ \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Y}\right|, \quad \boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Z} \Big/ \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Z}\right|, \tag{170}$$

y los tres vectores métricos son [1,18,19]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_X &= \boldsymbol{q}^a(a=1) = \left|\tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X}\right| \boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{q}_Y &= \boldsymbol{q}^a(a=2) = \left|\tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Y}\right| \boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{q}_Z &= \boldsymbol{q}^a(a=3) = \left|\tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial Z}\right| \boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{171}$$

Se deduce que en el espacio euclidiano tanto los componentes del vector unitario como del métrico deben de rotularse con un índice superior y uno inferior:

$$
\begin{aligned}
&q^1{}_1 = -1, \quad q^1{}_2 = 0, \quad q^1{}_3 = 0, \\
&q^2{}_1 = 0, \quad q^2{}_2 = -1, \quad q^2{}_3 = 0, \\
&q^3{}_1 = 0, \quad q^3{}_2 = 0, \quad q^3{}_3 = -1, \\
&q^1{}_1 = -i_1 = i_X = 1, \text{ etc.}
\end{aligned}
\tag{172}
$$

Estos resultados se extienden al espacio-tiempo euclidiano al usar el índice 0

$$q^0{}_0 = 1, \quad q^0{}_1 = 0, \quad q^0{}_2 = 0, \quad q^0{}_3 = 0. \tag{173}$$

Las Ecs.(172) y (173) definen el vielbein $q^a{}_\mu$ donde $a = 0, 1, 2, 3$, y $\mu = 0, 1, 2, 3$. Más precisamente, el vielbein es un vierbein o tétrada [2] porque hay 4 índices a internos o de espacio tangencial y 4 índices μ de la variedad base. Si se usa la tétrada en el contexto de la relatividad general, el índice a deviene el índice de espacio tangente , y si se usa la tétrada en teoría gauge, a es el índice del espacio interno que define el grupo gauge.

Por lo tanto, la geometría fundamental muestra que la tétrada puede usarse tanto en relatividad general como en teoría gauge, y esto es la clave para la unificación de campos.

En la Ref. [1] se muestra que tanto el campo gravitacional como el electromagnético se originan en la Ec.(45): si se describe el campo gravitacional mediante el tensor métrico simétrico $q_\mu q_\nu$ entonces el campo electromagnético debe describirse a través del tensor anti-simétrico:

$$G_{\mu\nu} = G^{(0)} \left(R_\mu \wedge q_\nu - \frac{1}{2} R q_\mu \wedge q_\nu \right). \tag{174}$$

Nuevamente esto es un resultado de la geometría, esencialmente el resultado afirma que si existe un producto punto entre dos vectores (el tensor métrico simétrico $q_\mu q_\nu$, usado para describir el campo gravitacional) entonces debe de existir un producto cruz entre los mismos dos vectores (tensor métrico anti-simétrico $q_\mu \wedge q_\nu$, usado para describir el campo electromagnético). Tomando la definición [1]

$$R = q^{\mu\nu(S)} R_{\mu\nu} = q^\mu q^\nu R_\mu q_\nu = -2 q^\mu R_\mu, \quad q^\nu q_\nu = -2, \tag{175}$$

resulta entonces que

$$R_\mu = \frac{1}{4} R q_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{4} G^{(0)} R \left(q_\mu \wedge q_\nu - 2 q_\mu \wedge q_\nu \right) \tag{176}$$

y el campo electromagnético puede expresarse en general como el producto cuña:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} G^{(0)} R (q_\mu \wedge q_\nu). \tag{177}$$

El signo negativo en la Ec.(177) es por convención, y en consecuencia el campo electromagnético puede expresarse en forma suscinta, dentro de un factor $B^{(0)}$, como el producto cuña entre q_μ y q_ν:

.

$$G_{\mu\nu} = B^{(0)}(q_\mu \wedge q_\nu), \tag{178}$$

donde $B^{(0)}$ tiene las unidades de la densidad de flujo magnético [7-12]:

$$B^{(0)} = \frac{1}{4} G^{(0)} R. \tag{179}$$

El producto cuña de dos una-formas en geometría diferencial se define [2] mediante

$$A_\mu \wedge B_\nu = (A \wedge B)_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu. \tag{180}$$

Por lo tanto, el producto cuña desaparece si se considera a q_μ y q_ν como 4-vectores sin índice interno. Resulta entonces que *el electromagnetismo no puede ser una teoría gauge sin índice interno, y por ende no puede ser una teoría de campo gauge U(1).* El producto cuña de los dos vielbeins $q^a{}_\mu$ y $q^b{}_\nu$ es

$$(q^a \wedge q^b)_{\mu\nu} = q^a{}_\mu q^b{}_\nu - q^a{}_\nu q^b{}_\mu, \tag{181}$$

y el campo electromagnético es la dos-forma diferencial

$$G^c{}_{\mu\nu} = B^{(0)}(q^a \wedge q^b)_{\mu\nu}. \tag{182}$$

En geometría diferencial, los índices griegos se vuelven redundantes (o sea, pueden asumirse implícitamente como siempre iguales en ambos lados de una ecuación en geometría diferencial, la teoría de las formas diferenciales), por lo que los índices griegos pueden suprimirse [2]. Por lo tanto, la Ec.(182) puede expresarse como

$$G^c = B^{(0)} q^a \wedge q^b, \tag{183}$$

y, dentro de un factor $B^{(0)}$, el campo electromagnético es una dos forma de torsión T^c:

$$G^c = B^{(0)} T^c = B^{(0)} q^a \wedge q^b. \tag{184}$$

La primera relación de estructura de Maurer-Cartan (154) relaciona la dos-forma de torsión con la forma de Riemann, y así la primera relación de estructura de Maurer-Cartan deviene una relación entre gravitación (forma de Riemann) y electromagnetismo (forma de torsión). Ajustando el índice a en la forma de torsión, la relación de estructura de Maurer-Cartan deviene una entre el campo débil y la gravitación, y el campo fuerte y la gravitación. Esta interrelación entre campos es un resultado de la geometría y de la nueva gran teoría del campo unificado desarrollada aquí.

En el lenguaje de tétradas y productos cuña, la ecuación geométrica $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ deviene

$$(q^1 \wedge q^2)_{12} = q^1{}_1 \wedge q^2{}_2 = q^1{}_1 q^2{}_2 - q^1{}_2 q^2{}_1 = q^1{}_1 q^2{}_2 = (q^3)_{12} = q^3{}_3. \tag{185}$$

en espacio-tiempo euclidiano en la base cartesiana la tétrada es distinta de cero si y sólo si $a = \mu_1$, de manera que se ha supuesto implícitamente que $q^a{}_\mu$ puede expresarse como q_μ. Esta suposición significa que la existencia del índice interno *a* en geometría básica se ha pasado por alto. En teoría gauge ello ha conducido a la suposición incorrecta que puede existir una teoría gauge (electromagnetismo) sin índice interno. Una cuidadosa consideración muestra, sin embargo, que los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ son los siguientes componentes de la tétrada:

$$-\boldsymbol{i} := (0, q^1{}_1, 0, 0), \quad -\boldsymbol{j} := (0, 0, q^2{}_2, 0), \quad -\boldsymbol{k} := (0, 0, 0, q^3{}_3). \tag{186}$$

En un espacio no euclidiano (variedad base) definida [1,14,15] por la base de coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3) los vectores unitarios son los vectores espaciales tangentes ortonormales

$$\boldsymbol{e}^a = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^a} / \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^a} \right|, \quad a = 1, 2, 3, \tag{187}$$

cumpliendo las relaciones cíclicas $O(3)$

$$\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{e}^3, \quad \text{et cyclicum}, \tag{188}$$

y los vectores métricos son

$$\boldsymbol{q}^a = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^a}, \quad a = 1, 2, 3, \tag{189}$$

o sea, los componentes de la tétrada

$$q^a{}_1 = -\frac{\partial X}{\partial u^a}, \quad q^a{}_2 = -\frac{\partial Y}{\partial u^a}, \quad q^a{}_3 = -\frac{\partial Z}{\partial u^a}. \tag{190}$$

La tétrada en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones es por lo tanto $q^a{}_\mu$. El índice superior a de la tétrada denota un espacio-tiempo plano, tangente ortonormal, en tanto que el índice inferior μ denota la variedad base no euclidiana (el espacio-tiempo no euclidiano de la relatividad general). Los factores estructurales [1] son:

$$h^a = (q^a{}_0 q^{a0} - q^a{}_1 q^{a1} - q^a{}_2 q^{a2} - q^a{}_3 q^{q3}). \tag{191}$$

En relatividad general, la métrica $q^a{}_\mu$ siempre tiene un índice superior a, y un índice inferior μ, y la tétrada $q^a{}_\mu$ es la eigenfunción de la ecuación de onda (25) de la gran teoría del campo unificado. Se ha demostrado aquí que esta ecuación de onda es el resultado directo del postulado de la tétrada, la Ec.(6), y así es resultado directo de la geometría. Más generalmente, también se ha demostrado aquí que debe de existir un índice interno *a* en todas las relaciones geométricas, tales como la relación entre los vectores unitarios cartesianos $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

La electrodinámica $O(3)$ [7-12] es por lo tanto la Ec.(178) cuando el índice interno *a* es (1), (2), y (3), y *la electrodinámica $O(3)$ es el resultado directo de la relatividad general, y de la geometría*. En otras palabras, la existencia misma de la gravitación es evidencia empírica para la existencia de la electrodinámica $O(3)$, porque la gravitación se describe a través de $q^a{}_\mu q^b{}_\nu$ y electrodinámica $O(3)$ por $q^a{}_\mu \wedge q^b{}_\nu$.

Ambos campos se originan en la ecuación clásica (45) [1], que es el límite clásico de la ecuación de onda (25). En la electrodinámica $O(3)$, el postulado de la tétrada (6) deviene las ecuaciones cíclicas con simetria $O(3)$.

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \boldsymbol{A}^{(3)*}{}_\nu &= -ig\boldsymbol{A}^{(1)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(2)}{}_\nu, \\
\partial_\mu \boldsymbol{A}^{(1)*}{}_\nu &= -ig\boldsymbol{A}^{(2)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(3)}{}_\nu, \\
\partial_\mu \boldsymbol{A}^{(2)*}{}_\nu &= -ig\boldsymbol{A}^{(3)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(1)}{}_\nu,
\end{aligned} \tag{192}
$$

donde usamos la relación $A^a{}_\mu = A^{(0)}q^a{}_\mu$. El postulado de la tétrada (6) muestra que:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \boldsymbol{A}^{(1)*}{}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}^{(1)*}{}_\mu &= -ig\boldsymbol{A}^{(2)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(3)}{}_\nu, \\
\partial_\mu \boldsymbol{A}^{(2)*}{}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}^{(2)*}{}_\mu &= -ig\boldsymbol{A}^{(3)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(1)}{}_\nu, \\
\boldsymbol{B}^{(3)*}{}_{\mu\nu} &= -ig\boldsymbol{A}^{(1)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(2)}{}_\nu.
\end{aligned} \tag{193}
$$

El campo gauge en electrodinámica $O(3)$ se define por las relaciones cíclicas [7-12]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}^{(3)*}{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \boldsymbol{A}^{(3)*}{}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}^{(3)*}{}_\mu - ig\boldsymbol{A}^{(1)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(2)}{}_\nu, \\
\boldsymbol{G}^{(1)*}{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \boldsymbol{A}^{(1)*}{}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}^{(1)*}{}_\mu - ig\boldsymbol{A}^{(2)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(3)}{}_\nu, \\
\boldsymbol{G}^{(2)*}{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \boldsymbol{A}^{(2)*}{}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}^{(2)*}{}_\mu - ig\boldsymbol{A}^{(3)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(1)}{}_\nu.
\end{aligned} \tag{194}
$$

Pero sabemos de la Ec.(178) que

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}^{(3)*}{}_{\mu\nu} &= -iB^{(0)}\boldsymbol{q}^{(1)}{}_\mu \times \boldsymbol{q}^{(2)}{}_\nu, \\
\boldsymbol{G}^{(1)*}{}_{\mu\nu} &= -iB^{(0)}\boldsymbol{q}^{(2)}{}_\mu \times \boldsymbol{q}^{(3)}{}_\nu, \\
\boldsymbol{G}^{(2)*}{}_{\mu\nu} &= -iB^{(0)}\boldsymbol{q}^{(3)}{}_\mu \times \boldsymbol{q}^{(1)}{}_\nu,
\end{aligned} \tag{195}
$$

así que en electrodinámica $O(3)$ existen las siguientes relaciones tridimensionales:

$$
g\boldsymbol{A}^{(1)}{}_\mu \times \boldsymbol{A}^{(2)}{}_\nu = B^{(0)}\boldsymbol{q}^{(1)}{}_\mu \times \boldsymbol{q}^{(2)}{}_\nu, \quad \text{et cyclicum.} \tag{196}
$$

Finalmente la comprensión de que el campo electromagnético debe de ser una tétrada permite la descripción del espacio interno mediante un índice apropiado del espacio tangente ortonormal, por ejemplo a puede ser $(1), (2), (3)$ de la base circular compleja, o puede ser (X, Y, Z) de la base cartesiana. Así, la electrodinámica $O(3)$ o cualquier electrodinámica de simetría superior, puede desarrollarse utilizando cualquier índice a bien definido del espacio tangente de la relatividad general. Esto significa que la electrodinámica puede desarrollarse como una teoría de campo gauge de simetría $SU(2)$, o como una simetría de campo gauge con simetría $SU(3)$. Esto sugiere que los campos débil y fuerte pueden ser ambos manifestaciones del campo electromagnético. Esencialmente, un campo se cambia en otro cambiando el índice a. Por lo tanto, emergen muchas posibles interrelaciones entre campos una vez que se comprende que el índice a siempre está presente en la tétrada $q^a{}_\mu$, es decir, en la eigenfunción de la ecuación de onda (25).

.

Agradecimientos

El autor agradece muchas discusiones informativas con colegas de AIAS y otros.

Referencias bibliograficas

1. M.W. Evans, *Found. Phys. Lett.*, **16**, 367 (2003).
2. S. M. Carroll, *Lecture Notes in General Relativity*, (University of California, Santa Barbara Graduate Course,arXiv:gr-ge/9712019 v1 3 Dec., 1997).
3. R. M. Wald, *General Relativity* , (University of Chicago Press, 1984).
4. A. Einstein, *The Meaning of Relativity* , (Princeton University Press, 1929)
5. L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* , (Cambridge University Press, 1987, 1996).
6. M. W. Evans, *Physica B* 182, 227 (1992).
7. M. W. Evans y S. Kielich, eds., *Modern Non-Linear Optics*, en I. Prigonine y S. A. Rice, eds. de serie, *Advances in Chemical Physics*, Vol. 85 1ª edn. (Wiley-Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997).
8. M. W. Evans y A. A. Hasanein, *The Photomagneton in Quantum Field Theory*, (World Scientific, Singapur, 1994).
9. M. W. Evans y J.-P. Vigier, et al., *The Enigmatic Photon*, Vols. 1-5, (Kluwer Academic, Dordrecht, 1994-2002).
10. M. W. Evans y L. B Crowell, *Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field*, (World Scientific, Singapur, 2001).
11. M. W. Evans, ed., *Modern Non-Linear Optics*, en I. Prigogine y S.A. Rice, series eds., *Advances in Chemical Physics*, Vol. 119, 2ª ed. (Wiley Interscience, Nueva York, 2001).
12. D. J. Clements y M. W. Evans, *Found. Phys. Lett*, 16 (5) 2003. M. W. Evans et al. (Grupo de autores de AIAS), ibid., 16 (195) (2003).
13. M. W. Evans et al. (Grupo de autores de AIAS), *Found. Phys. Lett.*, **16**, 275, (2003).

14. M. W. Evans, *Lecture Notes in O(3) Electrodynamics*, (World Scientific, Singapur, en prep.).

15. E. G. Milewski, *The Vector Analysis Problem Solver*, (Research and Education Associates, Nueva York, 1987).

16. M. Sachs, en Ref. [11] Vol.119(1).

17. G. Stephenson, *Mathematical Methods for Science Students*, (Longmanns & Greens, Londres, 1968).

18. J. B. Marion y S. T. Thornton, 3ª ed., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, (Harcourt & Brace, Nueva York, 1988).

19. P. W. Atkins, *Molecular Quantum Mechanics*, 2ª ed.,(Oxford University Press, 1983).