Identidad de Cartan generalizada para la geometría de Cartan y un nuevo teorema de la Torsión de Cartan.

por

Myron W. Evans,
Alpha Institute for Advanced Study, Civil List Scientist.
(emyrone@aol.com y www.aias.us)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen

Se demuestra que el conmutador de derivadas covariantes que actúa sobre el cuatro-vector produce en general dos tensores interrelacionados por una forma generalizada de la conocida identidad de Bianchi de la geometría diferencial, tal como la desarrolló Cartan. Ejemplos de este teorema son la misma identidad original de Cartan/Bianchi, su identidad dual de Hodge y su identidad de derivada. Utilizando la conocida regla de derivada covariante de un tensor de rango tres, se demuestra una nueva identidad cíclica de la torsión de Cartan. En general, estos dos tensores siempre existen en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones, y su existencia es consecuencia directa de la definición de derivada covariante en cuatro dimensiones. Por lo tanto, toda teoría de la relatividad con consistencia interna debe basarse en esta geometría con consistencia interna.
Palabras clave: Identidad generalizada de Cartan/Bianchi, nuevo teorema de la torsión de Cartan, teoría de la relatividad.

1. Introducción

Es bien sabido que la geometría diferencial de Cartan [1] se desarrolla en términos de dos ecuaciones estructurales y la identidad de Bianchi. Las ecuaciones estructurales definen la torsión de Cartan en términos de la tétrada, y la curvatura de Cartan en términos de la conexión de espín. La identidad de Cartan/Bianchi relaciona la torsión y la curvatura. Recientemente, se ha desarrollado la teoría de Einstein Cartan Evans (ECE) en una teoría de campo unificado consistente y covariante generalizada basada directamente en estas ecuaciones estructurales e identidad de Bianchi [2-10]. La teoría ECE produce todas las ecuaciones de la física a partir de la geometría de Cartan, y unifica la relatividad y la mecánica ondulatoria utilizando el postulado de la tétrada. Este último es el teorema fundamental que vincula la geometría de Cartan con la de Riemann. En este documento se demuestra que la identidad de Cartan/Bianchi puede generalizarse para producir dos tensores cuya existencia depende sólo de la definición fundamental de la derivada covariante misma en cuatro dimensiones.Este teorema se demuestra en la Sección 2. Ejemplos del teorema son la identidad misma de Cartan/Bianchi, su identidad dual de Hodge, y su identidad de derivada. Este teorema autoconsistente de la geometría es fundamental para cualquier teoría de la relatividad válida en física, o filosofía natural. Cualquier teoría que asume arbitrariamente raramente asume que un tensor es igual a cero posee geométricamente inconsistencia interna, por lo que no puede producir una descripción correcta de la física. Un ejemplo de una teoría inconsistente es la teoría de campo gravitacional de Einstein/Hilbert, la cual se basa en una geometría incorrecta, de manera que no puede producir una física correcta. En la Sección 3 se demuestra un nuevo teorema de la torsión de Cartan a partir del teorema general de la Sección 2.

2 Identidad generalizada de Cartan/Bianchi.

Definimos dos tensores anti-simétricos cualesquiera mediante:

$$[D_\mu,\ D_\nu]V^\kappa := A^\kappa{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma - B^\lambda_{\mu\nu}D_\lambda V^\kappa \tag{1}$$

es decir, por la acción del conmutador de derivadas covariantes:

$$[D_\mu,\ D_\nu] = -[D_\nu,\ D_\mu] \tag{2}$$

sobre el cuatro-vector V^κ. Los dos tensores siempre se vinculan por la identidad generalizada de Cartan/Bianchi:

$$D \wedge B^a = A^a{}_b \wedge q^b \tag{3}$$

donde en la Ec.(3) se ha empleado la notación tradicional de la geometría diferencial [1–10].

La demostración de este teorema sólo se basa en la definición fundamental de la derivada covariante:

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}V^\lambda \tag{4}$$

donde Γ es la conexión. La Ec. (4) implica que la estructura de los dos tensores debe ser:

$$A^\kappa{}_{\sigma\mu\nu} := \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\sigma} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{5}$$

y

$$B^{\kappa}_{\mu\nu} := \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} \tag{6}$$

y que los dos tensores deben ser anti-simétriccos como sigue:

$$A^{\kappa}{}_{\sigma\mu\nu} = -A^{\kappa}{}_{\sigma\nu\mu}, \tag{7}$$

$$B^{\kappa}_{\mu\nu} = -B^{\kappa}{}_{\nu\mu}. \tag{8}$$

Las Ecs.(5) a (8) siguen directamente de la Ec.(1) sin otra suposición más que la Ec.(4). Por lo tanto, dos tensores cualesquiera con las estrcturas (5) y (6) cumplirán con la identidad generalizada de Cartan/Bianchi (3). Ambos tensores se generan directamente del conmutador (2) y es incorrecto afirmar que un tensor debe de desaparecer. En general, ambos tensores deben de ser no nulos y ambos deben de existir en el mismo espacio-tiempo. Dada la estructura (5), sigue la estructura (6). Este resultado se cumple para todas las métricas y todas las conexiones, y es cierto frente a cualquier postulado de compatibilidad métrica [1–10]. El resultado depende sólo de la anti-simetría (2) del conmutador de derivadas covariantes. Este último es básico para la teoría de campo,como es bien sabido [11,12].

Es necesario demostrar que, si los tensores anti-simétricos (5) y (6) existen a partir del conmutador (2), entonces siempre cumplen la Ec.(3). En notación tensorial,la Ec.(3) es:

$$D_\mu B^a_{\nu\rho} + D_\rho B^a_{\mu\nu} + D_\nu B^a_{\rho\mu} = A^a_{\mu\nu\rho} + A^a_{\rho\mu\nu} + A^a_{\nu\rho\mu}. \tag{9}$$

Las derivadas covariantes del lado izquierdo de esta ecuación se expanden [1–10] con la conexión de espín como sigue:

$$\begin{aligned} &\partial_\mu B^a_{\nu\rho} + \omega^a_{\mu b} B^b_{\nu\rho} + \partial_\rho B^a_{\mu\nu} + \omega^a_{\rho b} B^b_{\mu\nu} + \partial_\nu B^a_{\rho\mu} + \omega^a_{\nu b} B^b_{\rho\mu} \\ &\quad = (A^\lambda_{\mu\nu\rho} + A^\lambda_{\rho\mu\nu} + A^\lambda_{\nu\rho\mu}) q^a_\lambda \end{aligned} \tag{10}$$

donde:

$$B^a_{\nu\rho} = (\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}) q^a_\lambda \quad \text{etc.}, \tag{11}$$

$$B^b_{\nu\rho} = (\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}) q^b_\lambda \quad \text{etc.} \tag{12}$$

La tétrada de Cartan se define mediante el postulado de la tétrada [1–10]:

$$D_\mu q^a_\sigma = \partial_\mu q^a_\sigma + \omega^a_{\mu b} q^b_\sigma - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} q^a_\lambda = 0 \tag{13}$$

Por lo tanto, el postulado de la tétrada vincula la conexión de espín

con la conexión gamma:

$$\partial_\mu q^a_\sigma + \omega^a_{\mu b} q^b_\sigma = \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} q^a_\lambda. \tag{14}$$

Utilizando el Teorema de Leibnitz:

$$\partial_\mu B^a_{\nu\rho} = (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu}) q^a_\lambda + (\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}) \partial_\mu q^a_\lambda \quad \text{etc.}, \tag{15}$$

así, la Ec.(10) deviene:

$$\begin{aligned} &(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu}) q^a_\lambda + (\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu})(\partial_\mu q^a_\lambda + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda) + \ldots \\ &\quad = (A^\lambda_{\mu\nu\rho} + A^\lambda_{\rho\mu\nu} + A^\lambda_{\nu\rho\mu}) q^a_\lambda. \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora re-rotulamos los índices de sumatoria en el segundo término del lado izquierdo como sigue:

$$\lambda \to \sigma. \tag{17}$$

Estos son los índices repetidos, o índices mudos de la notación covariante - contravariante, y se suma sobre ellos por definición. Por lo tanto, pueden adoptar cualquier rótulo, y luego de este re-rotulado la Ec (16) deviene:

$$\begin{aligned} &(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu}) q^a_\lambda + (\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu})(\partial_\mu q^a_\sigma + \omega^a_{\mu b} q^b_\sigma) + \ldots \\ &\quad = (A^\lambda_{\mu\nu\rho} + A^\lambda_{\rho\mu\nu} + A^\lambda_{\nu\rho\mu}) q^a_\lambda. \end{aligned} \tag{18}$$

Finalmente se usa el postulado de la tétrada (14) para obtener:

$$\begin{aligned} A^\lambda_{\mu\nu\rho} + A^\lambda_{\rho\mu\nu} + A^\lambda_{\nu\rho\mu} = {} & \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}(\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}) \\ & + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}) \\ & + \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}(\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}) \end{aligned} \tag{19}$$

Reordenamos esta suma cíclica como sigue:

$$\begin{aligned} & A^\lambda_{\rho\mu\nu} + A^\lambda_{\mu\nu\rho} + A^\lambda_{\nu\rho\mu} \\ & \quad = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} \\ & \quad\quad + \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} \\ & \quad\quad + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}. \end{aligned} \tag{20}$$

Esta es precisamente la suma cíclica de tres definiciones (5). Para obtener este resultado debe de emplearse la definicion (6). Así, los dos tensores $A^{\kappa}_{\sigma\mu\nu}$ y $B^{\kappa}_{\mu\nu}$ se relacionan mediante la Ec. (3), Q.E.D.

Nótese que la Ec.(20) es la suma cíclica de tres tensores (5) de un lado, y la suma cíclica de las definiciones de estos mismos tensores del otro lado. Así, la Ec.(20) y, por lo tanto, la Ec.(3), son identidades exactas que cumplen CUALESQUIERA dos tensores con las estructuras (5) y (6). Como se vio de la Ec.(1), estos dos tensores siempre existen en cuatro dimensiones. Multiplicamos ambos lados de la Ec.(9) por la tétrada q_a^{κ}:

$$(D_\mu B^a_{\nu\rho} + D_\rho B^a_{\mu\nu} + D_\nu B^a_{\rho\mu}) q^\kappa_a = (A^a_{\mu\nu\rho} + A^a_{\rho\mu\nu} + A^a_{\nu\rho\mu}) q^\kappa_a \tag{21}$$

para hallar que la siguiente es una solución particular de la Ec.(3):

$$D_\mu B^\kappa_{\nu\rho} + D_\rho B^\kappa_{\mu\nu} + D_\nu B^\kappa_{\rho\mu} = A^\kappa_{\mu\nu\rho} + A^\kappa_{\rho\mu\nu} + A^\kappa_{\nu\rho\mu}. \tag{22}$$

La Ec.(22) se expresa en la variedad o *manifold* base (un espacio-tiempo de 4 dimensiones) y elimina el índice tangente *a* de la geometría de Cartan [1–10].

La identidad de Cartan/Bianchi se recupera si:

$$A^\kappa_{\mu\nu\rho} = R^\kappa_{\mu\nu\rho}, \quad B^\kappa_{\nu\rho} = T^\kappa_{\nu\rho} \tag{23}$$

donde $R^\kappa_{\mu\nu\rho}$ es el tensor de curvatura y $T^\kappa_{\nu\rho}$ es el de torsión. Otro ejemplo importante de la Ec. (22) se encuentra usando el dual de Hodge del operador del conmutador, como sigue:

$$[D^\mu, D^\nu]_{\mathrm{HD}} = \frac{1}{2} \parallel g \parallel^{\frac{1}{2}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [D_\alpha, D_\beta] \tag{24}$$

Aquí $\|g\|^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada del determinante de la métrica [1–10], y $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor unitario totalmente anti-simétrico en cuatro dimensiones. Este último se define de la misma forma [1–10] que en un espacio-tiempo de Minkowski. A partir de las Ecs.(1) y (24):

$$[D_\mu, D_\nu]_{\mathrm{HD}} V^\kappa = \widetilde{A}^\kappa{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - \widetilde{B}^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\kappa \tag{25}$$

donde:

$$\widetilde{A}^\kappa{}_{\sigma\mu\nu} := (\partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\sigma} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma})_{\mathrm{HD}}. \tag{26}$$

y

$$\widetilde{B}^\kappa_{\mu\nu} := (\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu})_{\mathrm{HD}}. \tag{27}$$

Los tensores duales de Hodge (26) y (27) son ejemplos de los tensores $A^{\kappa}_{\sigma\mu\nu}$ y $B^{\kappa}_{\mu\nu}$ y entonces se vinculan mediante:

$$D \wedge \widetilde{B}^a = \widetilde{A}^a{}_b \wedge q^b. \tag{28}$$

Por ejemplo:

$$\widetilde{A}^{\kappa}{}_{\sigma}{}^{01} = \partial_2 \Gamma^{\kappa}_{3\sigma} - \partial_3 \Gamma^{\kappa}_{2\sigma} + \Gamma^{\kappa}_{2\lambda}\Gamma^{\lambda}_{3\sigma} - \Gamma^{\kappa}_{3\lambda}\Gamma^{\lambda}_{2\sigma} \tag{29}$$

y:

$$\widetilde{B}^{\kappa 01} = \Gamma^{\kappa}_{23} - \Gamma^{\kappa}_{32} \tag{30}$$

y estos se relacionan entre sí de la misma manera que las Ecs.(5) y (6), utilizando las mismas conexiones.

Por lo tanto, hemos probado rigurosamente que, si:

$$D \wedge B^a = A^a{}_b \wedge q^b \tag{31}$$

entonces:

$$D \wedge \widetilde{B}^a = \widetilde{A}^a{}_b \wedge q^b. \tag{32}$$

La Ec.(32) se conoce como el dual de Hodge de la identidad de Cartan/Bianchi y se infirió por primera vez durante el desarrollo de la teoría ECE [2–10]. Es claro que también existe la identidad de la derivada:

$$D \wedge (D \wedge B^a) := D \wedge (A^a{}_b \wedge q^b) \tag{33}$$

que es la forma correcta de la así llamada "segunda identidad de Bianchi" del modelo tradicional.

En el documento 93 de la teoría ECE (www.aias.us) se mostró con álgebra computacional que los tensores de curvatura del tipo $R^{\kappa\mu\nu}{}_{\mu}$ son en general distintos de cero si se calculan a partir de soluciones exactas de la ecuación de campo gravitacional de Einstein Hilbert (EH). Todas estas soluciones utilizan la conocida conexión de Christoffel:

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} \tag{34}$$

y métrica simétrica:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \tag{35}$$

.

Así, por ejemplo:

$$R^{0}{}_{\mu}{}^{\mu 0} \neq 0 \tag{36}$$

y sumando sobre índices repetidos de μ:

$$R^{0}{}_{1}{}^{10} + R^{0}{}_{2}{}^{20} + R^{0}{}_{3}{}^{30} \neq 0. \tag{37}$$

Por antisimetría:

$$R^{0}{}_{1}{}^{10} + R^{0}{}_{2}{}^{20} + R^{0}{}_{3}{}^{30} \neq 0. \tag{38}$$

Por definición,los duales de Hodge en 4 dimensiones [1–10] de estos elementos tensoriales también son antisimétricos en sus dos últimos índices y se definen con:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{R}^{0}{}_{123} &= \parallel g \parallel^{\frac{1}{2}} R^{0}{}_{1}{}^{01} \\ \widetilde{R}^{0}{}_{231} &= \parallel g \parallel^{\frac{1}{2}} R^{0}{}_{2}{}^{02} \\ \widetilde{R}^{0}{}_{312} &= \parallel g \parallel^{\frac{1}{2}} R^{0}{}_{3}{}^{03}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Por lo tanto, la Ec.(38) es:

$$\widetilde{R}^{0}{}_{123} + \widetilde{R}^{0}{}_{231} + \widetilde{R}^{0}{}_{312} \neq 0 \tag{40}$$

en general,para soluciones exactas de la ecuacion de campo EH de la gravitación. La Ec.(40) es un ejemplo de:

$$\widetilde{R}^{\kappa}{}_{\mu\nu\rho} + \widetilde{R}^{\kappa}{}_{\rho\mu\nu} + \widetilde{R}^{\kappa}{}_{\nu\rho\mu} \neq 0 \tag{41}$$

en general. Por lo tanto, por la Ec. (22):

$$D_{\mu}\widetilde{T}^{\kappa}_{\nu\rho} + D_{\rho}\widetilde{T}^{\kappa}_{\mu\nu} + D_{\mu}\widetilde{T}^{\kappa}_{\rho\mu} = \widetilde{R}^{\kappa}_{\mu\nu\rho} + \widetilde{R}^{\kappa}_{\rho\mu\nu} + \widetilde{R}^{\kappa}_{\nu\rho\mu} \neq 0 \tag{42}$$

que es lo mismo que la ecuación:

$$D_{\mu}T^{\kappa\mu\nu} = R^{\kappa}{}_{\mu}{}^{\mu\nu} \neq 0. \tag{43}$$

Por lo tanto el lado derecho de la Ec.(43) no es cero en general para soluciones exactas de la ecuación de la gravitación de EH, pero el lado izquierdo de la Ec. (43) siempre es cero para estas mismas soluciones exactas, porque todas utilizan el símbolo de Christoffel (34). El tensor de torsión $T^{\kappa\mu\nu}$ es siempre cero para el símbolo de Christoffel, pero como demostramos mediante álgebra computacional, el tensor de curvatura no es cero en general para los mismos símbolos o conexiones de Christoffel.

Por lo tanto, la ecuación de campo de EH es auto-inconsistente a un nivel fundamental y debe considerarse obsoleta. La razón para la falta de auto-consistencia es que la ecuación de EH se desarrolló en1915, antes de la existencia del tensor de torsión, descubierto por Cartan en 1922. La única teoría consistente de la relatividad, desarrollada y aplicada a toda la física, es la teoría ECE [2–10]. Las inferencias extraídas de la teoría EH deben de re-evaluarse utilizando la correcta teoría ECE. Ejemplos de inferencias de la teoría EH son el *Big Bang*, la existencia de hoyos negros y la radiación gravitacional, la existencia de materia oscura e inferencias similares que se basan en una geometría incorrecta. Por lo tanto, no pueden representar una física correcta. Igualmente, los supuestos ensayos de precisión de la relatividad general deben de re-evaluarse y re-explicarse con teoría ECE, que se ha iniciado en esta serie de artículos. Similarmente, todas las soluciones conocidas de EH deben evaluarse con el tensor de curvvatura $R^{\kappa\mu\nu}{}_{\mu}$, lo cual ya se está haciendo. Claramente esto es una re-evaluación de un amplio sector de la física moderna, el así-llamado "modelo tradicional". Este último nunca podrá ser una teoría correcta de campo unificado, por éstas y muchas otras razones conocidas [2–10]. Con anterioridad al año 2007 (es decir, del documento UFT 93) la existencia del tensor de curvatura $R^{\kappa\mu\nu}_{\mu}$ era desconocida.

En el UFT 93, se verificó con el mismo código utilizado en todas las soluciones exactas de la ecuación de EH:

$$R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma} + R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\nu} + R^{\kappa}{}_{\nu\sigma\mu} = 0 \tag{44}$$

Este resultado se conoce en el ahora obsoleto modelo tradicional como “la primera identidad de Bianchi”. De la Ec.(31) se ve que la Ec.(44) es equivalente a:

$$R^{a}{}_{b} \wedge q^{b} = 0 \tag{45}$$

y por lo tanto omite incorrectamente el tensor de torsión. Por lo tanto, es geométricamente incorrecto. Se desarrolló nuevamente antes de que Cartan infiriese la existencia de la torsión en 1922. No es una identidad ni fue inferida inicialmente por Bianchi. De hecho, fue inferida por Ricci y Levi-Civita. Análogamente, la así-llamada "segunda identidad de Bianchi” del modelo tradicional de la física:

$$D_{\mu} R^{\kappa}{}_{\sigma\nu\rho} + D_{\rho} R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\nu} + D_{\nu} R^{\kappa}{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{46}$$

es incorrecto, nuevamente porque omite, incorrectamente, la torsión. La Ec.(46) en notación de forma es:

$$D \wedge R^{a}{}_{b} = 0 \tag{47}$$

en tanto que la correcta versión de la Ec.(47) debe de ser la identidad de la derivada (33). Ésta última nuevamente fue inferida (en el documento 88) durante el desarrollo de la teoría ECE.

.

Un ejemplo de la Ec.(44) es:

$$R^0{}_{123} + R^0{}_{312} + R^0{}_{231} = 0. \tag{48}$$

Utilizando la Ec.(39), la Ec.(48) es la misma que:

$$\widetilde{R}^0{}_1{}^{01} + \widetilde{R}^0{}_2{}^{02} + \widetilde{R}^0{}_3{}^{03} = 0 \tag{49}$$

que es un ejemplo de:

$$\widetilde{R}^\kappa{}_\mu{}^{\mu\nu} = 0 \tag{50}$$

para soluciones de la ecuacion de campo EH de la gravitacion. Por lo tanto, estas soluciones:

$$D_\mu \widetilde{T}^{\kappa\mu\nu} = \widetilde{R}^\kappa{}_\mu{}^{\mu\nu} = 0 \tag{51}$$

o en notación de forma :

$$D \wedge T^a = R^a{}_b \wedge q^b = 0. \tag{52}$$

Por lo tanto:

$$\widetilde{T}^{\kappa\mu\nu} = 0, \quad \widetilde{R}^\kappa{}_\mu{}^{\mu\nu} = 0 \tag{53}$$

se cumple en forma fortuita por soluciones de la ecuacion de campo EH de la gravitacion, pero el dual de Hodge, la Ec.(43) NO lo cumplen estas mismas soluciones de la ecuación de campo de EH para la gravitación. Este resultado significa el fin de la lógica para la teoría de EH, y fue descubierto en 2007. Desde entonces se ha desarrollado la teoría ECE para considerar correctamente tanto la identidad de Bianchi como su identidad dual de Hodge. Estas identidades sirven de base para las ecuaciones de campo de ECE [2–10].

3. Una nueva identidad cíclica de la Torsión de Cartan.

Esta identidad es inherente a la identidad de Bianchi en la forma (22), pero no se ha demostrado hasta ahora. La demostracion es como sigue. Usar la definición de la derivada covariante de un tensor de rango tres [1–10] para demostrar:

$$D_\sigma T^\kappa_{\mu\nu} = \partial_\sigma T^\kappa_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa_{\sigma\lambda} T^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}, \tag{54}$$

$$D_\mu T^\kappa_{\nu\sigma} = \partial_\mu T^\kappa_{\nu\sigma} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} T^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\kappa_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} T^\kappa_{\nu\lambda} \tag{55}$$

$$D_\nu T^\kappa_{\sigma\mu} = \partial_\nu T^\kappa_{\sigma\mu} + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} T^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} T^\kappa_{\sigma\lambda} \tag{56}$$

-

Por lo tanto, empleando las Ecs.(54) a (56) en la Ec.(22):

$$\begin{aligned} &D_\sigma T^\kappa_{\mu\nu} + D_\mu T^\kappa_{\nu\sigma} + D_\mu T^\kappa_{\sigma\mu} \\ &\quad = (\partial_\sigma T^\kappa_{\mu\nu} + \partial_\mu T^\kappa_{\nu\sigma} + \partial_\nu T^\kappa_{\sigma\mu} + \Gamma^\kappa_{\sigma\lambda} T^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} T^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} T^\lambda_{\sigma\mu}) \\ &\qquad - (\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} T^\kappa_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} T^\kappa_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} T^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} T^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\kappa_{\lambda\sigma} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} T^\kappa_{\sigma\lambda}) \end{aligned} \tag{57}$$

Utilizando la definición del tensor de torsión [1–10]:

$$T^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{58}$$

el primer paréntesis en la Ec.(57) da la identidad de Bianchi (3), o sea:

$$\begin{aligned} &R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu} + R^\kappa{}_{\mu\nu\sigma} + R^\kappa{}_{\nu\sigma\mu} \\ &\quad = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\sigma} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \\ &\qquad + \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\kappa_{\nu\mu} + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\kappa_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \\ &\qquad + \partial_\sigma \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\sigma\nu} + \Gamma^\kappa_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \end{aligned} \tag{59}$$

Por tanto, el segundo paréntesis en la Ec.(57) debe ser idénticamente cero:

$$\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} T^\kappa_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} T^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\kappa_{\lambda\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} T^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} T^\kappa_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} T^\kappa_{\sigma\lambda} = 0. \tag{60}$$

Ahora usamos la anti-simetría:

$$T^\kappa_{\lambda\mu} = -T^\kappa_{\mu\lambda} \tag{61}$$

para probar una nueva identidad ciclica que cumple la torsión de Cartan:

$$T^\kappa_{\lambda\nu} T^\lambda_{\sigma\mu} + T^\kappa_{\lambda\mu} T^\lambda_{\nu\sigma} + T^\kappa_{\lambda\sigma} T^\lambda_{\mu\nu} = 0 \tag{62}$$

En notación de forma, la Ec.(62) es el producto cuña:

$$T^\kappa{}_\lambda \wedge T^\lambda = 0 \tag{63}$$

que en notación abreviada puede denotarse como:

$$T \wedge T = 0. \tag{64}$$

$T^\kappa{}_\lambda$ se define como la uno-forma tensorial [1–10] de indice ν:

$$T^\kappa{}_\lambda := T^\kappa{}_{\lambda\nu} \tag{65}$$

.

y T^λ se define como la dos-forma vectorial de índice $\sigma\mu$:

$$T^\lambda := T^\lambda{}_{\sigma\mu} \,. \tag{66}$$

La notación abreviada (64) explica la estructura básica de la identida tensorial (62) como siendo afín, en escritura, al producto cruzado de un vector consigo mismo, o afín en estructura al Lema de Poincare. El nuevo teorema (62) es inherente a la identidad de Bianchi misma, y es otra forma de revelar la rigurosa consistencia interna de la geometría de Cartan. Si se intenta afirmar una geometría que no es consistente con la geometría de Cartan, la inconsistencia se revelará tarde o temprano. En este caso de la teoría de EH, finalmente se reveló a través del tensor de curvatura $R^{\kappa\mu\nu}{}_{\mu}$. Este último es esencialmente imposible de calcular manualmente, debido a la intrincada complejidad de su estructura interna (ver documento de la serie UFT93 en el portal www.aias.us). Por lo tanto , $R^\kappa{}_\mu{}^{\mu\nu}$ nunca se habia computado antes de 2007, y era obviamente desconocido hasta para el mismo Einstein. Tambien era desconocido para los instigadores de la teoria del *Big Bang,* en especial Hawking y Penrose, y para el instigador de la teoria de hoyos negros, Wheeler. Por lo tanto, las afirmaciones del modelo tradicional se han vuelto elaboradas, pero todas ellas se basan en una geometría fundamentalmente incorrecta. Por lo tanto, la teoría ECE es la única teoría de la relatividad que posee consistencia interna.

Referencias

[1] S. P. Carroll, "Space-time and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004, también apuntes de clase1997 en línea).

[2] M. W. Evans, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis, Suffolk, 2005 al presente), vols. 1–4, vol. 5 en prep. (Docs 71 al 93 en www.aias.us).

[3] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis, 2007).

[4] K. Pendergast, "Crystal Spheres" (Abramis a publicarse, preimpresión en www.aias.us).

[5] M. W. Evans, Sección Omnia Opera de www.aias.us (1992 al presente en ECE y teorías precursoras).

[6] M. W. Evans, (ed.) Adv. Chem. Phys., vol. 119 (2001), ibid., M. W. Evans y S. Kielich (eds.), vol. 85 (1992, 1993, 1997, primera edición del vol. 119).

[7] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).

[8] M. W. Evans and J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 a 2002 con encuadernación dura y blanda), en cinco volúmenes.

[9] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).

[10] M. W. Evans, Acta Phys. Polon. B, **38**, 2211 (2007); M. W. Evans y H. Eckardt, Physica B, **400**, 175 (2007); **403**, 517 (2008).

[11] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory" (Cambridge Univ. Press, 2ª. Ed., 1996).

[12] R. M. Wald, "General Relativity" (Chicago Univ. Press, 1984).