ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS DE DINÁMICA DE FLUIDOS DEDUCIDOS A PARTIR DE LA TEORÍA ECE.

por

M. W. Evans

Civil List Scientist

Alpha Institute for Advanced Study (www.aias.us)

Traducción: Ing. Alex Hill (www.et3m.net)

RESUMEN

Se deducen conceptos básicos de dinámica de fluidos a partir de geometría en el contexto de la Teoría de Einstein Cartan Evans (ECE). Estos conceptos incluyen el de la conexión de Stokes, la ecuación de continuidad y las ecuaciones de fluidos no viscosos y viscosos. Estos conceptos pueden deducirse a partir de la geometría diferencial de Cartan utilizando un mínimo de hipótesis, de acuerdo con la navaja de Ockham.

Palabras clave: Teoría ECE, dinámica de fluidos, conexión de Stokes, ecuación de continuidad, fluido no viscoso, fluido viscoso.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de dinámica de fluidos se basan por lo general en el sistema de ecuaciones de Navier Stokes, deducidas en forma independiente por Navier y Stokes en el siglo XIX {1}. Estas ecuaciones están bien descritas en muchos libros de texto. En este documento, se aplica la teoría de Einstein, Cartan y Evans (ECE) por primera vez a la dinámica de fluidos hará deducir los conceptos básicos de fluido dinámica a partir de la geometría diferencial de Cartan, transformando así a la dinámica de fluidos en una teoría de relatividad general a partir de la cual pueden deducirse sus ecuaciones principales dentro del límites bien definidos. En la Sección 2 se deduce la ecuación de continuidad del sistema de Navier Stokes a partir del postulado de la tétrada de la geometría diferencial de Cartan {2-11}. Se demuestra que la conexión de Stokes es una forma limitante de la conexión de espín de la geometría de Cartan.

En la Sección 3 se deduce la ecuación del fluido no viscoso a partir de la ecuación de la primera estructura de Cartan, y en la Sección 4 se extiende el análisis a la ecuación del fluido viscoso. Se señalan similitudes con la electrodinámica dentro del contexto de la teoría ECE.

2. LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE NAVIER STOKES

Esta ecuación es la ecuación de conservación de la densidad de masa ρ, y es análoga a la ecuación de continuidad de la densidad de carga en el campo de la electrodinámica. La ecuación puede expresarse como {1}:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \, \underline{v}) = 0 \tag{1}$$

donde $\underline{v}$ es velocidad lineal. La Ec. (1) en notación tensorial es:

$$\partial_\mu \, U^\mu = 0 \tag{2}$$

donde:

$$U^\mu = (c\,\rho, \underline{\mathrm{v}}\,\rho\,) \tag{3}$$

Aquí, *c* es la velocidad de la luz en el vacío, y la densidad y velocidad son:

$$\rho = \rho\,(X, Y, Z, t\,) \tag{4}$$

y

$$\underline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{v}}\,(X, Y, Z, t\,) \tag{5}$$

la Ec. (1) es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\,\rho.\,\underline{\mathrm{v}} + \rho\,\underline{\nabla}\,.\,\underline{\mathrm{v}} \;=\; 0 \tag{6}$$

es decir:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\underline{\nabla}\,.\,\underline{\mathrm{v}} \;=\; 0 \tag{7}$$

donde

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\,\rho.\,\underline{\mathrm{v}} \tag{8}$$

es la derivada de Stokes [1]. Esto constituye una medida del ritmo de cambio de la densidad en un punto que se mueve con el fluido. Es la derivada a lo largo de un camino que se mueve con una velocidad $\underline{\mathrm{v}}$. En esta Sección se muestra que la derivada de Stokes es una derivada covariante de relatividad general y que la continuidad del sistema de Navier Stokes es un postulado de la tétrada.

La Ec. (6) puede expresarse como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\,\underline{\mathrm{v}}\,.\underline{\nabla} + \underline{\nabla}\,.\,\underline{\mathrm{v}}\,\right)\,\rho = 0 \tag{9}$$

de manera que la derivada covariante es:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\underline{\mathrm{v}}\ .\underline{\nabla} + \underline{\nabla}\ .\ \underline{\mathrm{v}}\right) \tag{10}$$

La conexión es, por lo tanto, una simple conexión escalar:

$$\Gamma = \underline{\mathrm{v}}\ .\underline{\nabla} + \underline{\nabla}\ .\ \underline{\mathrm{v}} \tag{11}$$

y la Ec. (9) es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma\, \rho = 0 \tag{12}$$

que es una ecuación de relatividad general. La derivada de Stokes de una velocidad $\underline{\mathrm{v}}$ es:

$$\frac{D\underline{\underline{\mathrm{v}}}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\underline{\mathrm{v}}}}{\partial t} + \left(\underline{\mathrm{v}}\ .\underline{\nabla}\ \right)\underline{\mathrm{v}} \tag{13}$$

y este concepto se emplea en las otras ecuaciones del sistema de Navier Stokes.

Con el objeto de reducir la Ec. (12) a partir de una teoría del campo unificado, debe hallarse su estructura geométrica básica. Una geometría auto consistente adecuada es la geometría diferencial de Cartan {2-11}, cuyo bien conocido postulados de la tétrada es:

$$D_\mu\, q^a_\nu = \partial_\mu\, q^a_\nu + \omega^a_{\mu b}\, q^b_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, q^a_\lambda = 0 \tag{14}$$

Aquí, q^a_ν es la tétrada de Cartan, $\omega^a_{\mu b}$ es la conexión de espín y $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ es la conexión anti simétrica de Riemann:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = q^\lambda_a\, \Gamma^a_{\mu\nu} = q^\lambda_a\, (\partial_\mu\, q^a_\nu + \omega^a_{\mu b}\ ) \tag{15}$$

Introduciendo la tétrada de la densidad de masa:

$$\rho^a_\mu = \rho\, q^a_\mu\ = (\rho^a_0\ ,\ \underline{\rho}^a) \tag{16}$$

donde:

$$a = (0)\ , (1), (2), (3) \tag{17}$$

es la base circular compleja del espacio tiempo {3-11}. La densidad de masa cotidiana valuada mediante un escalar, constituye un límite de este concepto más general de la tétrada de densidad de masa. La parte vectorial de la tétrada de densidad se define como:

$$\underline{\rho}^{(1)} = \rho_X^{(1)}\ \underline{\mathrm{i}}\ + \rho_Y^{(1)}\ \underline{\mathrm{j}}\ + \rho_Z^{(1)}\ \underline{\mathrm{k}} \tag{18}$$

y así sucesivamente. Por lo tanto:

$$\rho_\mu^{(1)} = (\rho_0^{(1)},\ \underline{\rho}^{(1)}\ ) \tag{19}$$

y así sucesivamente. La parte temporal de la tétrada de densidad de masa se define como:

$$\rho_\mu^{(0)} = (\rho_0^{(0)}, \underline{0}\ ) \tag{20}$$

de manera que

$$\underline{\rho}^{(0)} = \ \underline{0} \tag{21}$$

La base circular compleja se define en términos de los vectores unitarios cartesianos i, j, y k como:

$$\underline{e}^{(1)}\ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ \underline{\mathrm{i}} - i\ \underline{\mathrm{j}})\ ,\ \ \underline{e}^{(2)}\ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ \underline{\mathrm{i}} + i\ \underline{\mathrm{j}})\ ,\ \ \underline{e}^{(3)}\ =\ \underline{\mathrm{k}} \tag{22}$$

de manera que:

$$\underline{\rho}^{(1)} = \rho_X^{(1)}\underline{\mathrm{i}}\ + \rho_Y^{(1)}\ \underline{\mathrm{j}}\ \ ,\ \ \underline{\rho}^{(2)} = \rho_X^{(2)}\underline{\mathrm{i}}\ + \rho_Y^{(2)}\ \underline{\mathrm{j}}\ \ ,\ \ \underline{\rho}^{(3)} = \rho_Z^{(3)}\ \underline{\mathrm{k}} \tag{23}$$

son las corrientes de densidad de masa. Las Ecs. (18) a (23) son ejemplos del hecho que el campo vectorial general puede siempre expresarse {12} como:

$$\underline{V}\ =\ \underline{V}^{(1)} + \underline{V}^{(2)} + \underline{V}^{(3)} \tag{24}$$

una extensión del teorema de Helmholtz.

La densidad escalar puede definirse ahora como la suma de tres componentes temporales de la tétrada de densidad:

$$\rho = \rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} + \rho_0^{(3)} \tag{25}$$

y el postulado de la tétrada implica que:

$$D_\mu\ \rho_\nu^{a} = 0 \tag{26}$$

Por lo tanto, la ecuación de continuidad (12) implica que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} + \rho_0^{(3)}\right) + \Gamma\left(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} + \rho_0^{(3)}\right) = 0 \tag{27}$$

Es plausible suponer que:

$$\frac{\partial \rho_0^{(1)}}{\partial t} + \Gamma\ \rho_0^{(1)} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial \rho_0^{(2)}}{\partial t} + \Gamma\ \rho_0^{(2)} = 0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial \rho_0^{(3)}}{\partial t} + \Gamma\ \rho_0^{(3)} = 0 \tag{30}$$

de manera que los índices en la Ec. (26) vienen determinados por:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho_0^{(1)}}{\partial t} + \omega_{00}^{(1)} - \Gamma_{00}^{(1)} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho_0^{(2)}}{\partial t} + \omega_{00}^{(2)} - \Gamma_{00}^{(2)} = 0 \tag{32}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho_0^{(3)}}{\partial t} + \omega_{00}^{(3)} - \Gamma_{00}^{(3)} = 0 \tag{33}$$

Sin embargo:

$$\Gamma_{00}^{(1)} = \Gamma_{00}^{(2)} = \Gamma_{00}^{(3)} = 0 \tag{34}$$

de manera que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} + \rho_0^{(3)}\right) + c\left(\omega_{00}^{(1)} + \omega_{00}^{(2)} + \omega_{00}^{(3)}\right) = 0 \tag{35}$$

es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\left(\omega_{00}^{(1)} + \omega_{00}^{(2)} + \omega_{00}^{(3)}\right) = 0 \tag{36}$$

Comparando las Ecs. (12) y (36):

$$\Gamma = c\left(\omega_{00}^{(1)} + \omega_{00}^{(2)} + \omega_{00}^{(3)}\right) \tag{37}$$

La conexión de la derivada de Stokes viene dada por la combinación (37) de conexiones de espín de la geometría diferencial de Cartan, Q.E.D. de manera que la ecuación de continuidad del sistema de Navier Stokes es una ecuación limitante de relatividad general.

3. ECUACIÓN DEL FLUIDO NO VISCOSO

El fluido no viscoso es una bien conocida idealización que se incluye en los libros de texto {1} pero que sin embargo sirve para ilustrar cómo los conceptos básicos de la dinámica de fluidos pueden deducirse a partir de la geometría diferencial de Cartan. El Modelo de ingeniería ECE {2-11} utiliza la ecuación de la primera ruptura de Cartan y una sencilla hipótesis para producir la siguiente ecuación para la aceleración en dinámica:

$$\underline{g}^a = -\frac{\partial \underline{\mathrm{v}}^a}{\partial t} - c\,\underline{\nabla}\mathrm{v}_0^a - \omega_{0b}^a\; c\;\underline{\mathrm{v}}^b + c\mathrm{v}_0^b\underline{\omega}_b^a \tag{38}$$

y también una expresión general para la velocidad angular:

$$\underline{\Omega}^a = \underline{\nabla} \times \underline{\mathrm{v}}^a - \underline{\omega}_b^a \times \underline{\mathrm{v}}^b \tag{39}$$

El campo de velocidad vectorial se expande como un ejemplo de la Ec. (24):

$$\underline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{v}}^{(1)} + \underline{\mathrm{v}}^{(2)} + \underline{\mathrm{v}}^{(3)} \tag{40}$$

La conexión de espín en estas ecuaciones se define como:

$$\omega_{\mu b}^a = (\omega_{0b}^a\,,\, -\underline{\omega}_b^a) \tag{41}$$

y la tétrada de velocidad como:

$$\mathrm{v}_\mu^a = \frac{1}{c}\,\Phi_\mu^a \tag{42}$$

donde:

$$\Phi_\mu^a = \Phi\; q_\mu^a \tag{43}$$

es la tétrada de potencial gravitacional.

Se mostrará en esta sección que la Ec. (38) da la ecuación del fluido no viscoso como un formato limitante particular. En el límite no relativista {1} puede definirse la aceleración mediante una aproximación lineal de un desarrollo en serie de MacLaurin como:

$$\underline{a} = (\underline{\nabla} \cdot \underline{v})\,\underline{v} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \tag{44}$$

y la vorticidad {1} definida como:

$$\underline{\Omega} = \underline{\nabla} \times \underline{v} \tag{45}$$

El formato de la Ec.(38) significa que la aceleración en relatividad general es:

$$\underline{a}^{a} = \frac{\partial \underline{v}^{a}}{\partial t} + \omega^{a}_{0b}\ \underline{v}^{b} + c\,\underline{\nabla} v^{a}_{0} - c v^{b}_{0}\underline{\omega}^{a}_{b} \tag{46}$$

y que la vorticidad en relatividad general es:

$$\underline{\Omega}^{a} = \underline{\nabla} \times \underline{v}^{a} - \underline{\omega}^{a}_{b} \times \underline{v}^{b} \tag{47}$$

En las ecuaciones la cuatro-velocidad es:

$$v^{a}_{\mu} = (v^{a}_{0}, -\underline{v}^{a}) = \frac{1}{c}\,(\Phi^{a}_{0}, -\underline{\Phi}) \tag{48}$$

En un fluido no viscoso {1} la aceleración se calcula como:

$$\underline{a} = -\frac{1}{m}\,(\underline{\nabla}\, p + \underline{\nabla}\, \phi) \tag{49}$$

donde p es la presión, m es la masa, y ϕ es la energía potencial total por unidad de masa debido a todas las fuerzas de los cuerpos. De manera que la descripción de libro de texto de un fluido no viscoso es {1}:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{\nabla} \cdot \underline{v})\,\underline{v} = -\frac{1}{m}\,(\underline{\nabla}\, p + \underline{\nabla}\, \phi) \tag{50}$$

ó:

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{\nabla} \cdot \underline{v})\,\underline{v} + \frac{1}{m}\,(\underline{\nabla}\, p + \underline{\nabla}\, \phi) = 0 \tag{51}$$

y la aceleración neta es igual a cero.

En relatividad general, para una aceleración neta igual a cero la Ec. (46) es:

$$\frac{\partial \underline{\mathrm{v}}^a}{\partial t} + \omega^a_{0b}\ \underline{\mathrm{v}}^b + c\,\underline{\nabla}\mathrm{v}^a_0 - c\,\mathrm{v}^b_0\underline{\omega}^a_b = \underline{0} \tag{52}$$

Esta ecuación puede simplificarse a:

$$\frac{\partial \underline{\mathrm{v}}^a}{\partial t} + \mathrm{v}\,\underline{\Omega}^a + c\,\underline{\nabla}\mathrm{v}^a_0 - c\,\Phi\,\underline{\omega}^a = 0 \tag{53}$$

donde:

$$\underline{\omega}^a = \omega^a_{10}\,\underline{\mathrm{i}} + \omega^a_{20}\,\underline{\mathrm{j}} + \omega^a_{30}\,\underline{\mathrm{k}} \tag{54}$$

y

$$\underline{\Omega}^a = \omega^a_{01}\,\underline{\mathrm{i}} + \omega^a_{02}\,\underline{\mathrm{j}} + \omega^a_{03}\,\underline{\mathrm{k}} \tag{55}$$

En esta simplificación hemos utilizado:

$$\mathrm{v}^b_0\underline{\omega}^a_b = \mathrm{v}\,\underline{\omega}^a \tag{56}$$

y

$$\omega^a_{0b}\ \underline{\mathrm{v}}^b = \mathrm{v}\,\underline{\Omega}^a \tag{57}$$

Para cada valor de a en la Ec.(53)

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{\mathrm{v}}}{\partial t} + \mathrm{v}\,\underline{\Omega} + c\underline{\nabla}\mathrm{v}_0 - c\mathrm{v}\underline{\omega} \tag{58}$$

Y esto se reduce a la Ec.(51) si:

$$\mathrm{v}\,\underline{\Omega} = \left(\underline{\nabla}\cdot\underline{\mathrm{v}}\right)\underline{\mathrm{v}} \tag{59}$$

$$\frac{1}{m}\left(\underline{\nabla}\,p + \underline{\nabla}\,\phi\right) = c\left(\underline{\nabla}\mathrm{v}_0 - \mathrm{v}\underline{\omega}\right) \tag{60}$$

De manera que hemos deducido la ecuación de libro de texto para un fluido no viscoso a partir de la ecuación de estructura de Cartan mediante un mínimo empleo de hipótesis, Q.E.D.

Nótese cuidadosamente que este procedimiento utiliza la conexión de espín como una parte intrínseca de la dinámica de fluidos, de manera que la relatividad general misma se ve extendida considerablemente como tema. Ya ha dejado de ser una pequeña corrección a la dinámica de Newton, habiéndose transformado en una parte intrínseca de la dinámica de fluidos. Todas las ecuaciones de la dinámica de fluidos devienen ecuaciones de relatividad general y algunas ecuaciones de dinámica de fluidos pueden corregirse utilizando el concepto de conexión de espín. Una de estas es la ecuación de vorticidad, que en relatividad general es:

$$\underline{\Omega}^{a} = \underline{\nabla} \times \underline{v}^{a} - \underline{\omega}_{b}^{a} \times \underline{v}^{b} \qquad (61)$$

Pero que en los libros de texto es {1}:

$$\underline{\Omega} = \underline{\nabla} \times \underline{v} \qquad (62)$$

La Ec. (60) en la filosofía de la relatividad general constituye una corrección de la Ec. (61). Aceptando aquí la Eq. (61) de los libros de texto para fines puramente ilustrativos, el procedimiento usual {1} es el empleo de las Ecs. (51) y (61) para producir la ecuación de libro de texto para el movimiento de un fluido no viscoso:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times (\underline{\Omega} \times \underline{v}) = 0 \qquad (63)$$

utilizando la suposición:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \qquad (64)$$

La relatividad general nos muestra que en la Ec. (63) existen términos ausentes. Estos términos pueden conducir a efectos que son observables experimentalmente.

Aceptando nuevamente la Ec. (63) sólo para fines ilustrativos, vemos que posee la misma estructura que la ley de inducción de Faraday incluida en los libros de texto:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0 \qquad (65)$$

donde $\underline{B}$ es la densidad de flujo magnético y $\underline{E}$ es la fuerza de campo eléctrico. La Ec. (62) posee la estructura:

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \qquad (66)$$

De la electrodinámica en el modelo establecido. En teoría ECE, la Ec. (66) deviene:

$$\underline{B}^a = \underline{\nabla} \times \underline{A}^a - \underline{\omega}^a_b \times \underline{A}^b \tag{67}$$

La Ec. (64) es análoga a:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0 \tag{68}$$

es el modelo establecido para la electrodinámica. Utilizando la prescripción mínima:

$$\underline{p} = m\,\underline{\mathrm{v}} = e\,\underline{A} \tag{69}$$

donde m es la masa y e es la carga, el modelo establecido para la electrodinámica nos da:

$$\underline{E} = \frac{e}{m}\,\underline{B} \times \underline{A} = \underline{B} \times \underline{\mathrm{v}} \tag{70}$$

que es la ley de fuerza de Lorentz. En resumen:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times (\,\underline{\Omega} \times \underline{\mathrm{v}}\,) = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times \underline{E} = \underline{0}$$

$$\underline{\Omega} = \underline{\nabla} \times \underline{\mathrm{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathrm{v}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$$

La cantidad $\underline{\Omega} \times \underline{\mathrm{v}}$ es análoga a la aceleración de Coriolis y a la fuerza de campo elèctrico $\underline{E}$. La vorticidad $\underline{\Omega}$ desempeña el papel de la densidad de flujo magnético $\underline{B}$. La velocidad $\underline{\mathrm{v}}$ juega el rol del potencial vectorial $\underline{A}$.

Nótese cuidadosamente que estos conceptos se extienden y generalizan en forma auto consistente en la teoría ECE, en donde:

$$\underline{a}^a = \frac{\partial \underline{\mathrm{v}}^a}{\partial t} + c\,\omega^a_{0b}\;\underline{\mathrm{v}}^b + c\,\underline{\nabla}\mathrm{v}^a_0 - c\mathrm{v}^b_0\underline{\omega}^a_b \tag{71}$$

$$\underline{\Omega}^a = \underline{\nabla} \times \underline{\mathrm{v}}^a - \underline{\omega}^a_b \times \underline{\mathrm{v}}^b \tag{72}$$

La expresión empleada para la aceleración, empleada en la Ec.(44) es:

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{\mathrm{v}}}{\partial t} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathrm{v}}) \underline{\mathrm{v}} + \frac{\partial \underline{\mathrm{v}}}{\partial t} \tag{73}$$

y constituye un caso particular de:

$$\underline{a}_{\mathrm{I}}^{a} = \frac{\partial \underline{\mathrm{v}}^{a}}{\partial t} + c\, \omega_{0b}^{a}\ \underline{\mathrm{v}}^{b} \tag{74}$$

La Ec. (49) es un caso especial de:

$$\underline{a}_{\mathrm{II}}^{a} = c\,(\underline{\nabla} \mathrm{v}_0^{a} - \mathrm{v}_0^{b} \underline{\omega}_{b}^{a}) \tag{75}$$

Y el fluido incompresible y no viscoso de los libros de texto, es:

$$\underline{a}_{\mathrm{I}}^{a} + \underline{a}_{\mathrm{II}}^{a} = \underline{0} \tag{76}$$

La relatividad general deja así de constituir una corrección menor en la dinámica de minuto, y deviene en la teoría ECE una parte intrínseca de la dinámica cotidiana, agregando nuevos términos a ecuaciones bien conocidas, términos que pueden tener un efecto experimental medible, o que se obtienen a partir de efectos bien conocidos pero interpretados en una nueva forma.

4. ECUACIÓN PARA FLUIDOS VISCOSOS

En este caso hay una fuerza viscosa $\underline{\mathrm{f}}_{\mathrm{v}}$, de manera que la Ec.(51) deviene {1}:

$$\underline{\mathrm{f}}_{\mathrm{v}} = \rho\,(\frac{\partial \underline{\mathrm{v}}}{\partial t} + (\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\mathrm{v}}) + \underline{\nabla}\, p + \rho\, \underline{\nabla}\, \phi \tag{77}$$

La forma más general de derivadas segundas que puede dares en una ecuación vectorial es una combinación lineal de términos $\nabla^2 \underline{\mathrm{v}}$ y $\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathrm{v}})$, de manera que la fuerza viscosa se expresa como:

$$\underline{\mathrm{f}}_{\mathrm{v}} = \mu\, \nabla^2 \underline{\mathrm{v}} + (\mu + \mu')\, \underline{\nabla}\, (\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathrm{v}}) \tag{78}$$

donde μ y μ' son coeficientes. De manera que la ecuación de movimiento para un fluido viscoso se deduce mediante el empleo de la vorticidad (62) y es:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times (\underline{\Omega} \times \underline{v}) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{\Omega} \qquad (79)$$

En teoría ECE y en relatividad general una vez más hay nuevos términos para el fluido viscoso y para las otras ecuaciones del sistema de Navier Stokes. Éstas se desarrollarán en documentos posteriores.

RECONOCIMIENTOS

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y el Escudo de Armas como reconocimiento de contribuciones mayores para la Gran Bretaña en el campo de las ciencias, y se agradece a colegas alrededor del mundo por muchas discusiones interesantes.

REFERENCIAS

{1} E. G. Milewski, Chief Ed., "The Vector Analysis Problem Solver" (Research and Education Association, Nueva York, 1987).

{2} S. P. Carroll, "Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004).

{3} M. W. Evans, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, Nueva York, 2005 y siguientes), es seis volúmenes a la fecha, volume siete en preparación (www.aias.us).

{4} L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007).

{5} K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (Abramis, en prensa).

{6} M. W. Evans et al., www.aias.us y www.atomicprecision.com.

{7} M. W. Evans, ed., "Modern Non-Linear Optics" (Wiley 2001, segunda edición).

{8} M. W. Evans y S. Kielich (eds.), "Modern Non-linear Optics" (Wiley 1992, 1993, 1997, primera edición).

{9} M. W. Evans y L .B. Crowell, “Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field” (World Scientific, 2001).

{10} M. W. Evans y J.-P. Vigier, “The Enigmatic Photon” (Kluwer, Dordrecht, 1994 a 2002), en cinco volúmenes.

{11} M. W. Evans y A. A. Hasanein, “The Photomagneton in Quantum Field Theory” (World Scientific, 1994).

{12} D. Reed en ref. (7).