DEMOSTRACIONES SIMPLIFICADAS DE LAS ECUACIONES DE ESTRUCTURA DE CARTAN.

por

M. W. Evans,

Civil List Scientist

Alpha Institute for Advanced Studies,

(www.aias.us)

RESUMEN

Se demuestran las dos ecuaciones de estructura de Cartan directamente a través del empleo de un formato simplificado para el postulado de la tétrada. Al hacerlo se descubre una nueva condición general de la geometría diferencial de Cartan y se ilustra con respecto a las tétradas de una onda en propagación, polarizada circularmente.

Palabras clave: Ecuaciones de estructura de Cartan, postulado de la tétrada simplificado, nueva ecuación de la geometría diferencial de Cartan.

1. INTRODUCCION

La primera y segunda ecuaciones de estructura de Cartan definen las formas de torsión y curvatura de la geometría diferencial y son equivalentes a la torsión y curvatura de Riemann {1-10}. Ellas muestran la rigurosa y completa auto consistencia interna de la geometría de Cartan e ilustran el papel desempeñado por la tétrada de Cartan y del postulado de la tétrada de Cartan. Por lo tanto, es importante poder demostrar las ecuaciones de estructura en una forma tan simple y clara como sea posible, y poder demostrar su equivalencia con la geometría de Riemann del siglo XIX. El papel desempeñado por el índice a de la geometría de Cartan también se clarifica e ilustra claramente mediante estas demostraciones, las cuales pueden observarse en la Sección 2. En la Sección 3 se ilustra la demostración de la segunda ecuación de estructura con referencia a la tétrada de la onda en propagación polarizada circularmente. Si una geometría es auto-consistente internamente se proclama como tal y puede utilizarse en la filosofía de la relatividad general como en la teoría ECE, para brindar una nueva física y unificar los más conocidos conceptos de la física.

2. DEMOSTRACIONES DE LAS ECUACIONES DE ESTRUCTURA DE CARTAN.

En la notación estándar {1} de la geometría diferencial, la primera ecuación de estructura de Cartan es:

$$T^a = d \wedge q^a + \omega^a_b \wedge q^b \tag{1}$$

donde T^a es la forma de torsión, una dos-forma calculada vectorialmente, q^a es la forma de la tétrada (una una-forma valuada vectorialmente), ω^a_b es la conexión de espín de Cartan, y $d \wedge$ es la derivada exterior. En notación tensorial, esta notación se traduce como:

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu \, q^a_\nu - \partial_\nu \, q^a_\mu + \omega^a_{\mu b} q^b_\nu - \omega^b_{\nu b} q^b_\mu \tag{2}$$

A continuación se da la demostración de la equivalencia de la Ec.(2) y la torsión de Riemann:

$$T^{\kappa}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} \tag{3}$$

donde $T^{\kappa}_{\mu\nu}$ es la torsión de Riemann y donde $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ es la conexión de Riemann. La ventaja de la Ec.(2) sobre la Ec.(3) es que la Ec. (2) utiliza un índice a que puede desarrollarse con cualesquiera elementos base tales como las matrices de Pauli de la teoría de Dirac. En el Documento 141 de esta serie se demostró que el índice a puede utilizarse para denotar la base circular compleja, donde posee un significado profundo en cuanto a que extiende el Teorema de Helmholtz.

La equivalencia de las Ecs. (2) y (3) se origina en la propiedad fundamental de que el completo campo vectorial es independiente {1-10} de sus coordenadas y elementos base:

$$V = V^{\mu}\, e_{\mu} = V^{a}\, e_{a} \tag{4}$$

Este es siempre el caso en física y relatividad general. Sin la propiedad (4) un campo vectorial tridimensional, por ejemplo, sería diferente en coordenadas cartesianas o esféricas polares. La propiedad (4) conduce a la ecuación:

$$D_{\mu}\, q^{a}_{\nu} = \partial_{\mu}\, q^{a}_{\nu} + \omega^{a}_{\mu b} q^{b}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\, q^{a}_{\lambda} \tag{5}$$

Esto se conoce confusa y oscuramente como "el postulado de la tétrada"{1}. La Ec. (5) es fundamentalmente cierta en física y en casi toda la matemática, y no constituye un postulado. Se deduce a partir de la propiedad (4) {1-10}. Utilizando las reglas {1}:

$$\omega^{a}_{\mu\nu} = \omega^{a}_{\mu b}\, q^{b}_{\nu} \tag{6}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\, q^{a}_{\lambda} = \Gamma^{a}_{\mu\nu}\ , \tag{7}$$

El postulado de la tétrada se simplifica a:

$$\Gamma^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\, q^{a}_{\nu} + \omega^{a}_{\mu\nu} \tag{8}$$

Y la ecuación de la primera estructura de Cartan se simplifica a:

$$T^a_{\mu\nu} = \Gamma^a_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\nu\mu} \tag{9}$$

Resulta de inmediato que la torsión de Riemann es:

$$T^\kappa_{\mu\nu} = q^\kappa_a \, T^a_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{10}$$

Q.E.D.

Las torsiones de Cartan y Riemann son ambas conceptos muy fundamentales de la geometría, en cualquier espacio y en cualquier número de dimensiones. La torsión de Riemann siempre está presente en cualquier espacio, y se define mediante el conmutador de derivadas covariantes en cualquier espacio de cualquier número de dimensiones {1-10}:

$$[D_\mu, D_\nu] \; V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\kappa_{\mu\nu} \, D_\kappa V^\rho \tag{11}$$

Donde V^ρ es cualquier vector, $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es la curvatura de Riemann y $D_\kappa V^\rho$ es la derivada covariante de V^ρ. A partir de la Ec. (11) resulta obvio que la conexión de Riemann debe ser antisimétrica:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = -\Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{12}$$

debido a que los índices μ y ν son iguales en ambos lados de la ecuación y porque el conmutador es antisimétrico por definición {1-10}. La conexión nunca puede ser simétrica porque el conmutador nunca puede ser simétrico y distinto de cero simultáneamente. La segunda ecuación de estructura de Cartan es {1-10}:

$$R^a_b = d \wedge \omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \tag{13}$$

donde R^a_b es la forma de curvatura (una dos-forma valuada tensorialmente). En notación tensorial la Ec.(13) es:

$$R^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_{\nu b} - \partial_\nu \omega^a_{\mu b} + \omega^a_{\mu c} \, \omega^c_{\nu b} - \omega^a_{\nu c} \, \omega^c_{\mu b} \tag{14}$$

Y a continuación se demuestra que esta ecuación es equivalente a la curvatura de Riemann:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \, \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \, \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{15}$$

Comencemos la demostración notando que:

$$\omega^a_{\mu b} = q^\nu_b \omega^a_{\mu\nu} = \Gamma^a_{\mu b} - q^\nu_b\, \partial_\mu q^a_\nu$$

$$= \Gamma^a_{\mu b} - \partial_\mu q^a_b \tag{16}$$

Nótese que:

$$q^\nu_b\, \partial_\mu q^a_\nu = \partial_\mu q^a_b \tag{17}$$

Debido a que la tétrada multiplica una cantidad tensorial de rango tres de índices mezclados $\partial_\mu q^a_\nu$.

Por lo tanto:

$$R^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^a_{\nu b} - \partial_\nu \Gamma^a_{\mu b} + \Gamma^a_{\mu c}\ \Gamma^c_{\nu b} - \Gamma^a_{\nu c}\ \Gamma^c_{\mu b} - (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\ q^a_b$$

$$- \Gamma^c_{cb}\, \partial_\mu q^a_\nu - \Gamma^a_{cb}\, \partial_\nu q^c_\mu + \Gamma^c_{cb}\, \partial_\mu q^a_\nu + \Gamma^a_{cb}\, \partial_\nu q^c_\mu$$

$$= \partial_\mu \Gamma^a_{\nu b} - \partial_\nu \Gamma^a_{\mu b} + \Gamma^a_{\mu c}\ \Gamma^c_{\nu b} - \Gamma^a_{\nu c}\ \Gamma^c_{\mu b} \tag{18}$$

Finalmente utilizamos:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = q^\rho_a\ q^b_\sigma\ R^a_{b\mu\nu} \tag{19}$$

y

$$\Gamma^\rho_{\mu c}\ \Gamma^c_{\nu\sigma} = \ q^c_\lambda\ q^\lambda_c\ \ \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\ \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\ \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \tag{20}$$

Para obtener la Ec. (15), Q.E.D.

Esta es una demostración mucho más sencilla y clara que la ofrecida previamente en un apéndice del documento 15 de la serie ECE.

Por las reglas de la geometría de Cartan resulta que:

$$q^a_b = q^a_\mu\ \ q^\mu_b \tag{21}$$

de manera que utilizando el Teorema de Leibniz:

$$\partial_\nu q^a_b = q^\mu_b\ \partial_\nu q^a_\mu + q^a_\mu\ \partial_\nu\ q^\mu_b \tag{22}$$

La tétrada q^a_b es un espaciotiempo de Minkowski es la diagonal unitaria:

$$q^a_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

de manera que:

$$\partial_\nu q^a_b = 0 \tag{24}$$

A partir de las Ecs. (17) y (22) resulta que:

$$q^a_\mu \partial_\nu q^\mu_b = 0 \tag{25}$$

y esto constituye una nueva condición o restricción de la geometría de Cartan debido a que ésta última utiliza el índice a para denotar un espaciotiempo de Minkowski {1-10}. En la teoría ECE el potencial se define en términos de la tétrada {2-10}, de manera que, por ejemplo, el potencial electromagnético es:

$$A^a_\mu = A^{(0)} q^a_\mu \tag{26}$$

Por lo tanto:

$$A^a_\mu \, \partial_\nu \, A^\mu_b = 0 \tag{27}$$

y esto constituye una nueva restricción general del potencial electromagnético en la teoría ECE. Análogamente, en la teoría gravitacional:

$$\Phi^a_\mu \, \partial_\nu \, \Phi^\mu_b = 0 \tag{28}$$

donde Φ^a_μ es el potencial gravitacional. La Ec. (8) y (25) muestran que:

$$\Gamma^a_{\mu b} = \omega^a_{\mu b} \tag{29}$$

de manera que la equivalencia de las curvaturas de Cartan y de Riemann resulta de inmediato demostrada.

Nótese que el tensor de la métrica se define en general por:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{30}$$

donde x^{ν} es el cuatro-vector de posición::

$$x^{\nu} = (c\,t, X, Y, Z) \tag{31}$$

En el espaciotiempo de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

La Ec. (30) puede expresarse como:

$$x^{\mu} = \mathrm{g}^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{33}$$

donde:

$$\mathrm{g}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

En la geometría diferencial de Cartan se define la tétrada en general mediante {1-10}:

$$V^{a} = \mathrm{q}^{a}_{\mu}\, V^{\mu} \tag{35}$$

donde Ves cualquier campo vectorial. La Ec. (33) es un caso especial de la Ec. (35):

$$x^{a} = \mathrm{q}^{a}_{b}\, x^{b} \tag{36}$$

de manera que se deduce que:

$$\mathrm{q}^{a}_{b} = \mathrm{g}^{a}_{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Q.E.D.

Para ejemplificar la Ec. (25) considérense las siguientes tétradas de onda plana:

$$\boldsymbol{q}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - i\, \mathbf{j})\, e^{i\varphi} \tag{38}$$

y

$$\boldsymbol{q}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\,\mathbf{i} + i\,\mathbf{j}\,)\,e^{-i\varphi} \tag{39}$$

La Ec. (39) es la compleja conjugada de la Ec.(38) y φ es la fase de la onda plana. La base circular compleja viene definida por:

$$\boldsymbol{q}^{(1)} \times \boldsymbol{q}^{(2)} = i\,\boldsymbol{q}^{(3)*} \tag{40}$$

en permutación cíclica.

Consideremos elementos tales como:

$$\mathrm{q}_X^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\varphi} \quad , \quad \mathrm{q}_Y^{(1)} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\,e^{i\varphi} \tag{41}$$

$$\mathrm{q}_X^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i\varphi} \; , \quad \mathrm{q}_Y^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}}\,e^{-i\varphi} \tag{42}$$

Y utilicemos la regla:

$$\mathrm{q}_\mu^a\;\mathrm{q}_a^\mu = 1 \tag{43}$$

De la geometría de Cartan para hallar que:

$$\mathrm{q}_X^{(1)}\;\mathrm{q}_{(1)}^X + \mathrm{q}_Y^{(1)}\;\mathrm{q}_{(1)}^Y + \mathrm{q}_X^{(2)}\;\mathrm{q}_{(2)}^X + \mathrm{q}_Y^{(2)}\;\mathrm{q}_{(2)}^Y = 1 \tag{43a}$$

Una solución de la Ec. (43) es:

$$\mathrm{q}_{(1)}^X = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i\varphi} \quad , \quad \mathrm{q}_{(1)}^Y = \frac{i}{\sqrt{2}}\,e^{-i\varphi} \quad ,$$

$$\mathrm{q}_{(2)}^X = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\varphi} \quad , \quad \mathrm{q}_{(2)}^Y = \frac{-i}{\sqrt{2}}\,e^{i\varphi} \tag{44}$$

Consideremos un ejemplo de la Ec.(25):

$$q_\mu^a \partial_\nu q_b^\mu = \mathrm{q}_X^{(1)}\partial_\nu\,\mathrm{q}_{(2)}^X + \mathrm{q}_Y^{(1)}\partial_\nu\,\mathrm{q}_{(2)}^Y \tag{45}$$

Para:

$$\nu = 0 \tag{46}$$

resulta que:

$$\mathrm{q}_X^{(1)}\partial_0\,\mathrm{q}_{(2)}^X + \mathrm{q}_Y^{(1)}\partial_0\,\mathrm{q}_{(2)}^Y = 0 \tag{47}$$

Para:

$$\nu = 3 \tag{48}$$

se deduce que:

$$q_X^{(1)}\partial_3\ q_{(2)}^X + q_Y^{(1)}\partial_3\ q_{(2)}^Y = 0 \tag{49}$$

Consideremos un segundo ejemplo de la Ec. (25):

$$q_\mu^a\partial_\nu q_b^\mu = q_X^{(2)}\partial_\nu\ q_{(1)}^X + q_Y^{(2)}\partial_\nu\ q_{(1)}^Y \tag{50}$$

y resulta que:

$$q_X^{(2)}\partial_0\ q_{(1)}^X + q_Y^{(2)}\partial_0\ q_{(1)}^Y = 0 \tag{51}$$

y:

$$q_X^{(2)}\partial_3\ q_{(1)}^X + q_Y^{(2)}\partial_3\ q_{(1)}^Y = 0 \tag{52}$$

De manera que la restricción general (25) sea evaluado con las tétradas de la onda plana polarizada circularmente, hallándose un resultado auto consistente. Éste procedimiento ilustra la importancia de la simplicidad y claridad en las matemáticas y muestra que, en el marco de sus propios términos de definición, las dos ecuaciones de estructura, la geometría de Cartan es perfectamente auto consistente. Análoga mente, dentro de sus términos de referencia, la geometría de Euclides es perfectamente auto consistente, o la geometría de Riemann resulta también perfectamente auto consistente. Puede que sea posible tener una geometría ultra abstracta en donde el campo vectorial no es independiente de sus coordenadas o elementos base, pero semejante tipo de geometría meramente agrega abstracción y contraviene el principio más fundamental de la relatividad general, la covarianza general. No hay evidencia experimental que tales geometrías tengan papel alguno en la naturaleza. Por ejemplo, podría ser posible definir variedades diferentes de aquellas de Riemann, pero una vez más no existe evidencia que tales variedades sean importantes para la filosofía natural (la física). La construcción de tales variedades sin evidencia experimental alguna resulta contraria a la regla más fundamental de la filosofía natural, la Navaja de Ockham. En otras palabras, se trataría sólo de matemáticas por las matemáticas mismas. La teoría de cuerdas cae dentro de la misma categoría, así como cualquier otra teoría que contenga inobservables. El siglo XX está saturado con tales teorías fallidas. La teoría ECE, por otra parte, se ha evaluado experimentalmente en muchas maneras {2 - 10} y es fundamentalmente muy sencilla, basándose la misma directamente en la geometría de Cartan. No debiera de sorprender a nadie que todas las ecuaciones de la física surjan a partir de la geometría utilizando la Navaja de Ockham.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al gobierno británico por la pensión civil y vitalicia y por el escudo de armas como reconocimiento de las contribuciones de este autor a la Gran Bretaña en ciencias, y a colegas por muchas discusiones interesantes. Se agradece al Grupo de Alex Hill por el tipografiado de este documento.

REFERENCIAS

{1} S. P. Carroll, "Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004), capítulo 3.

{2} M. W. Evans, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis, 2005 y siguientes), en siete volúmenes a la fecha, volumen 7 con H. Eckardt, D. Lindstrom y F. Lichtenberg.

{3} L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007).

{4} Los portales de ECE www.aias.us y www.atomicprecision.com

{5} K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (Abramis en prensa).

{6} M. W. Evans, H. Eckardt, S. Crothers y K. Pendergast, “Criticisms of the Einstein Field Equation” (Abramis en prep.).

{7} M. W. Evans (ed.), “Modern Nonlinear Optics” (Wiley 2001, segunda edición).

{8} M. W. Evans y S. Kielich (eds.), ibid, primera edición (1992, 1993, 1997).

{9} M. W. Evans y J.-P. Vigier, “The Enigmatic Photon” (Kluwer, 1994 a 2002), en cinco volúmenes.

{10} M. W. Evans, documentos acerca de B(3) y teoría ECE, en la sección de Omnia Opera de www.aias.us.