Acerca de la necesidad de tres ecuaciones de compatibilidad métrica para la definición de una conexión singular antisimétrica.

por

M. W. Evans,

Civil List y A.I.A.S.,

y

H. Eckardt y D. W. Lindstrom,

A.I.A.S. ,

(www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.atomicprecision.com,, www.upitec.org

www.et3m.net)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen

Se demuestra que se requieren tres ecuaciones de compatibilidad métrica para definir una conexión antisimétrica singular. La necesidad de una conexión antisimétrica se indica mediante el método del conmutador fundamental, utilizado para definir la curvatura y torsión de Riemann. El empleo de una ecuación de compatibilidad no resulta suficiente, lo cual genera una ambigüedad.

Palabras clave: Conexión antisimétrica única, compatibilidad métrica, teoria ECE.

1. Introducción.

Recientemente, en esta serie de documentos y libros [1-10] que desarrollan la teoría del campo unificado ECE se descubrió que la conexión geométrica antisimétrica puede obtenerse en forma directa a partir de la condición de compatibilidad, y que la ecuación de fuerza de Hooke/Newton de la gravitación universal puede expresarse directamente en términos de la conexión antisimétrica. Esta última se define a un nivel fundamental a través del método del conmutador [11] que se utiliza para representar un viaje redondo en el espacio con torsión y curvatura. La curvatura de Riemann no puede definirse sin la torsión de Riemann. Ambas siempre suceden juntas en forma ineluctable. En los primeros días de discusión y desarrollo de estos temas, cerca del año 1900, Levi Civita y Ricci definieron la conexión geométrica arbitrariamente como simétrica en sus dos índices inferiores, y utilizaron esta afirmación para extraer una conexión singular a partir de tres ecuaciones de compatibilidad en permutación cíclica. Esto constituyó un error catastrófico, repetido en forma acrítica a lo largo de todo el siglo XX. El método del conmutador demuestra claramente que la conexión geométrica es antisimétrica en sus dos índices inferiores; ésta asume la antisimetría del conmutador mismo, tal como lo hacen los tensores de torsión y de curvatura. Una sencilla demostración de esto se incluyó en el documento precedente UFT 187 (www.aias.us). La ecuación del conmutador utiliza el concepto de conexión, y no emplea el concepto de métrica. Análogamente, la identidad de Evans más fundamental [1-10] utiliza sólo la conexión. La métrica aparece en el escenario porque se utiliza para una variedad de propósitos [11] en geometría, y se utiliza para deducir órbitas.

La ecuación de compatibilidad métrica constituye una afirmación sin demostración y puede obtenerse a partir del postulado de la tétrada de la geometría de Cartan [1-11], en la que este matemático fue el primero en generalizar el concepto de conexión, propuesta originalmente por Christoffel. La ecuación de compatibilidad afirma que la derivada covariante de la métrica desaparece. La métrica es un tensor de rango dos, de manera que su derivada covariante contiene dos tipos de conexiones de Christoffel. Por lo tanto, empleando el concepto de compatibilidad métrica, puede establecerse una relación entre el concepto de métrica, originalmente de Riemann, y el concepto de conexión, propuesto por Christoffel. La conexión puede determinarse en forma única utilizando tres ecuaciones de compatibilidad en permutación cíclica. En la Sección 2 se demuestra que este procedimiento produce una ecuación sencilla para la conexión antisimétrica, y que define en forma singular a la conexión, cuando se la emplea con una conexión antisimétrica correcta. En la Sección 3 se utiliza álgebra computacional para demostrar que el empleo de una ecuación de compatibilidad resulta insuficiente para definir una conexión, y conduce a la generación de ambigüedades.

2. Deducción de una conexión antisimétrica definida en forma singular.

Consideremos tres ecuaciones de compatibilidad métrica en permutación cíclica:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \tag{1}$$
$$\partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0 \tag{2}$$
$$\partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0 \tag{3}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica, y $\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}$ es la conexión. Restamos la segunda y tercera ecuación de la primera para obtener:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0 \tag{4}$$

A partir de la ecuación del conmutador cualquier conexión distinta de cero debe de ser antisimétrica:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \tag{5}$$

y se define la métrica como antisimétrica [11]:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{6}$$

Por lo tanto:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0. \tag{7}$$

Por simplicidad de desarrollo y sin pérdida de generalidad consideremos una métrica diagonal:

$$\mu = \nu \tag{8}$$

de manera que

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} g_{\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} g_{\lambda\mu} = 0. \tag{9}$$

Por lo tanto la Ec. (4) se simplifica a:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} = \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} .$$

$$\mu = \nu . \tag{10}$$

Sea:

$$\mu = \nu = \alpha \tag{11}$$

entonces:

$$\partial_\rho g_{\alpha\alpha} - \partial_\alpha g_{\alpha\rho} - \partial_\alpha g_{\rho\alpha} = 2\, \Gamma_{\rho\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\alpha} . \tag{12}$$

Multipliquemos ambos lados por $g^{\lambda\alpha}$, la métrica inversa. Entonces:

$$\begin{aligned} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\rho g_{\alpha\alpha} - \partial_\alpha g_{\alpha\rho} - \partial_\alpha g_{\rho\alpha}\right) &= 2\, g^{\lambda\alpha}\, \Gamma_{\rho\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\alpha} \\ &= 2\, \Gamma_{\rho\alpha}^{\lambda} \end{aligned} \tag{13}$$

Por lo tanto:

$$\Gamma_{\rho\alpha}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\rho g_{\alpha\alpha} - \partial_\alpha g_{\alpha\rho} - \partial_\alpha g_{\rho\alpha}\right) \tag{14}$$

La métrica debe de ser diagonal en este desarrollo, de manera que:

$$\Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \left(\partial_\rho g_{\alpha\alpha} - \partial_\alpha g_{\alpha\rho} - \partial_\alpha g_{\rho\alpha} \right) \tag{15}$$

porque:

$$\alpha = \lambda \,. \tag{16}$$

La conexión debe ser antisimétrica, de manera que:

$$\rho \neq \alpha \tag{17}$$

en cuyo caso:

$$g_{\alpha\rho} = g_{\rho\alpha} = 0 \tag{18}$$

y

$$\Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \partial_\rho g_{\alpha\alpha} \,. \tag{19}$$

Esto constituye una ecuación sencilla en la que no se implica una suma sobre índices repetitivos. En consecuencia, por ejemplo, si

$$\alpha = 0 \,, \quad \rho = 1 \tag{20}$$

entonces

$$\Gamma^{0}_{10} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{00}}\partial_1 g_{00} \tag{21}$$

Si

$$\alpha = 2,\ \rho = 1 \tag{22}$$

entonces:

$$\Gamma^{2}_{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\partial_1 g_{22} \tag{23}$$

Si

$$\alpha = 3,\ \rho = 1 \tag{24}$$

entonces

$$\Gamma^{3}_{13} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\partial_1 g_{33} \tag{25}$$

y si

$$\alpha = 3,\ \rho = 2 \tag{26}$$

entonces

$$\Gamma^{3}_{23} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\partial_2 g_{33} \tag{27}$$

Nótese que el índice:

$$\alpha = 1$$

no se utiliza porque ello produce una conexión simétrica, la cual no se autoriza desde un principio.

3. Las conexiones antisimétricas que no desaparecen en un espaciotiempo con simetría esférica.

Tal como se muestra en el Apéndice de este documento, el empleo de tres ecuaciones de compatibilidad métrica con permutación cíclica conduce al teorema fundamental (A11) que vincula la conexión antisimétrica con la métrica para cualquier espacio matemático de cualquier dimensión. El teorema fundamental es la condición de compatibilidad métrica para una conexión definida como antisimétrica. Inversamente, cualquier métrica antisimétrica posee, por definición, compatibilidad métrica. El empleo de tres ecuaciones de compatibilidad métrica nos conduce nuevamente a una ecuación de compatibilidad métrica. Esta última es, por lo tanto, necesaria y suficiente para definir la conexión antisimétrica dada una métrica.

Es bien sabido [11] que la métrica de un espaciotiempo con simetría esférica es:

$$g_{00} = -m(r,t), \; g_{11} = n(r,t), \; g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \operatorname{sen}^2\phi \qquad (29)$$

donde $m(r,t)$ y $n(r,t)$ son funciones del tiempo t y de la coordenada radial r. En este caso, las conexiones antisimétrica permitidas se incluyen en la siguiente tabla:

Tabla 1: Las Conexiones Antisimétricas de un Espaciotiempo Esférico.

μ	ν	$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$
0	1	Γ^{0}_{10}
	2	Γ^{0}_{20}
	3	Γ^{0}_{30}
1	0	Γ^{1}_{01}
	2	Γ^{1}_{21}
	3	Γ^{1}_{31}
2	0	Γ^{2}_{02}
	1	Γ^{2}_{12}
	2	Γ^{2}_{32}
3	0	Γ^{3}_{03}
	1	Γ^{3}_{13}
	3	Γ^{3}_{23}

Para una métrica del tipo (29) existen cinco conexiones antisimétricas que se definen como sigue:

$$\Gamma^0_{10} = -\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2m}\frac{\partial m}{\partial r} \tag{30}$$

$$\Gamma^1_{01} = -\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2n}\frac{1}{c}\frac{\partial n}{\partial t} \tag{31}$$

$$\Gamma^2_{12} = -\Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \tag{32}$$

$$\Gamma^3_{13} = -\Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \tag{33}$$

$$\Gamma^3_{23} = -\Gamma^3_{32} = \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\,, \tag{34}$$

Estas conexiones se encuentran restringidas por la identidad de Evans [1-10]:

$$D_\mu T^{\kappa\mu\nu} = R^{\kappa\mu\nu}_{\mu}\,. \tag{35}$$

Los elementos permitidos del tensor de torsión para un espaciotiempo esférico descrito por la métrica (29) son simplemente el doble de los elementos de conexión permitidos:

$$T^\lambda_{\mu\nu} = 2\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{36}$$

El tensor de curvatura viene definido como:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{37}$$

Para su empleo en la Ec. (35) los índices se incrementan y reducen con los elementos de la métrica, como es habitual. Con el colapso de la cosmología einsteniana, se vuelve necesario intentar el desarrollo de una nueva cosmología basada en una conexión antisimétrica. Un espaciotiempo esférico en el que no existe una dependencia de *r* respecto de *t* produce la métrica (29) y las conexiones antisimétricas (30) a (34). Puede utilizarse la identidad de Evans (35) para intentar definir *m* y *n*. Finalmente, se obtiene la ecuación de las órbitas a partir del elemento de línea infinitesimal:

$$ds^2 = -c^2 m(r,t)dt^2 + n(r,t)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (38)$$

El desafío radica en lograr la descripción de todas las órbitas sin el empleo de la materia oscura. En astronomía existen muchos tipos de órbitas, que van desde aquellas en el sistema solar (las órbitas relativistas de Kepler) hasta aquellas de las galaxias en espiral. Se ha sabido durante medio siglo que la obsoleta cosmología einsteniana es completamente incapaz de describir las órbitas de una galaxia en espiral, de manera que la cosmología recayó en el puro empirismo mediante la introducción de la inobservable materia oscura. En ese punto la cosmología dejó de considerarse como un tema científico. La única forma de lograr que retome su camino es mediante el empleo de la geometría correcta, tal como se definía en éste y otros documentos de esta serie [1-10].

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia, y al grupo técnico de AIAS por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por su publicación en la red, a Alex Hill por sus traducciones y grabaciones, y a Robert Cheshire y a Simon Clifford por su colkaboración en las grabaciones.

Referencias.

[1] M. W. Evans, ed., Journal of Foundations of Physics and Chemistry (bimestral a partir de junio 2011, Cambridge International Science Publishing).

[2] M. W. Evans, S. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (Cambridge International Science Publishing, primavera 2011).

[3] K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (Cambridge International Science Publishing, primavera 2011).

[4] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007). Tanto la version en ingles como su traducción al castellano pueden hallarse en el portal www.aias.us . La traducción al castellano se encuentra en la Sección Español de dicho portal.

[5] M. W. Evans, H. Eckardt y K. Pendergast, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis 2005 - 2011) en siete volúmenes.

[6] Los portales acerca de la teoría ECE: www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.upitec.org, www.et3m.net.

[7] M. W. Evans (ed,), "Modern Nonlinear Optics" (Wiley, segunda edición, 2001) en tres volúmenes; ibid., M. W. Evans y S.Kielich (eds.), (Wiley, primera edición, 1992, 1993, 1997), en tres volúmenes.

[8] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).

[9] M. W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 - 2002), en diez volúmenes, en encuadernación ya sea de tapa dura o blanda.

[10] M .W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).

[11] S. P. Carroll, "Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004).

Apéndice del documento 188: Teorema de la conexión antisimétrica.

Consideremos tres condiciones de compatibilidad métrica con permutación cíclica:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \qquad (A1)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0 \qquad (A2)$$

$$\partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0 \qquad (A3)$$

Restar las Ecs (2) y (3) de la Ec. (1):

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda}$$
$$+ \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0. \qquad (A4)$$

Restar las Ecs. (1) y (2) de la Ec. (3):

$$\partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda}$$
$$+ \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0. \qquad (A5)$$

Restar las Ecs. (1) y (3) de la Ec. (2):

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}$$
$$+ \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0. \qquad (A6)$$

Ahora aplicamos antisimetría:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \tag{A7}$$

para obtener:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} = 2\left(\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\lambda\mu}\right) \tag{A8}$$

$$\partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} = 2\left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} g_{\lambda\rho}\right) \tag{A9}$$

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} = 2\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu}\right) \tag{A10}$$

Sumando las Ecs. (8) y (10):

$$\partial_\nu g_{\rho\mu} = -\left(\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\lambda\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}\right) \tag{A11}$$

Esta ecuación relaciona la métrica general con la conexión antisimétrica:

Para una métrica diagonal:

$$\rho = \mu \tag{A12}$$

de manera que:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \partial_\nu g_{\mu\mu} \tag{A13}$$

$$\nu \neq \mu. \tag{A14}$$

Este resultado recibe la denominación de "Teorema de la Conexión Antisimétrica".