El desarrollo de la relatividad general con la métrica de Minkowski.

Por

M. W. Evans y H. Eckardt

Civil List, AIAS y UPITEC
(www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.upitec.org, www.et3m.net)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen

Se utiliza la métrica de Minkowski en un plano para desarrollar una teoría para todas las órbitas. Se considera la transición de la relatividad restringida a la relatividad general mediante el empleo de una transformación de Lorentz con una velocidad variable *v*. En esta teoría la única constante de movimiento es el hamiltoniano, la mitad de la energía en reposo de un objeto en órbita con una masa *m*. Se desarrollan varias ecuaciones orbitales y se considera el límite newtoniano. Se ilustra la teoría mediante su utilización en el cálculo de órbitas del sistema solar y de galaxias. La teoría no predice órbitas, pero las racionaliza en términos de la métrica de Minkowski, y considera a las órbitas como una restricción sobre la métrica.

Palabras clave: Teoría ECE, leyes orbitales y ecuaciones basadas en la métrica de Minkowski.

1. Introducción.

Es bien sabido que Einstein y otros buscaban desarrollar la relatividad general a partir de la relatividad restringida, una teoría en la que un marco de referencia se mueve a una velocidad constante $\underline{v}$ con respecto a otro, y donde los dos marcos de referencia se relacionan a través de la transformación de Lorentz [1-11]. Este documento considera la generalización natural que se logra al permitir que $\underline{v}$ varíe en la transformación de Lorentz. El elemento lineal infinitesimal de la teoría es, por lo pronto, el elemento lineal basado en la métrica de Minkowski. En la Sección 2 se define a esta métrica en coordenadas polares cilíndricas en un plano, el plano de la órbita. Se deduce la ecuación orbital empleando los métodos de la relatividad general [11], métodos bien conocidos y que consisten en la definición de un lagrangiano a partir del elemento lineal sin utilizar el concepto de energía potencial. En consecuencia, el lagrangiano es igual al hamiltoniano H, el cual es igual a la mitad de la energía en reposo de un objeto en órbita con una masa m. Se utilizan las ecuaciones de Euler Lagrange para definir la energía total E y el momento angular total L. En la dinámica clásica, esas cantidades son constantes de movimiento, pero en relatividad general las mismas dependen en general del tiempo t y de la coordenada radial r. El hamiltoniano H no es igual a la energía total E en relatividad general. La teoría desarrollada en la Sección 2 constituye un caso especial de relatividad general en el cual la velocidad en la transformación de Lorentz no es constante, y en el cual la métrica de Minkowski está restringida por la órbita que se describe. La órbita introduce una relación entre los infinitésimos dr y dθ, de manera que la métrica de Minkowski se encuentra restringida. En la Sección 3, se compara esta teoría con la relatividad general en el espaciotiempo esférico más general, y al utilizar el Principio de Simplicidad, o Navaja de Ockham, se prefiere esta teoría como una descripción más sencilla y completa de todas las órbitas.

2. Las Ecuaciones Orbitales.

Consideremos la métrica de Minkowski en coordenadas polares cilíndricas:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 \tag{1}$$

en el plano:

$$dZ^2 = 0. \tag{2}$$

Aquí, las coordenadas son (r, θ), τ es el tiempo propio, t es el tiempo en el marco de referencia del observador, y c es la supuesta velocidad constante de la luz en el vacío. El lagrangiano y el hamiltoniano se definen como en la relatividad general [1 – 10]:

$$\mathcal{L} = H = \frac{1}{2} mc^2$$

$$= \frac{1}{2} mc^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 r^2 \qquad (3)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange dan la energía total:

$$E = \gamma mc^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) mc^2 \qquad (4)$$

y el momento angular total:

$$L = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt} \, . \qquad (5)$$

Nótese que la energía total E y el hamiltoniano H no son iguales. Esto constituye una característica bien conocida de la relatividad general. Por definición:

$$d\underline{r} \cdot d\underline{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 \qquad (6)$$

de manera que la velocidad de la partícula en órbita con una masa *m* es:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad (7)$$

en el marco de referencia del observador. A partir de las Ecs. (1) and (7),

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad (8)$$

que es el factor de Lorentz. Si *v* es constante, la energía total E es constante, pero no de otra forma. Para ilustrar este argumento un poco más, consideremos la métrica más general [11] del espaciotiempo con simetría esférica en el plano (2):

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = m(r,t) c^2 dt^2 - n(r,t) dr^2 - r^2 d\theta^2 \qquad (9)$$

Aquí, *m*(*r*, *t*) y *n*(*r*, *t*) son ambas funciones del tiempo y de la coordenada radial *r*. El hamiltoniano y el lagrangiano, a partir de la métrica (9), son:

$$\mathcal{L} = H = \frac{1}{2} mc^2$$

$$= \frac{1}{2} m\, m(r,t) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2} m\, n(r,t) \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \qquad (10)$$

y son iguales que para la métrica de Minkowski, es decir la mitad de la energía en reposo. Sin embargo, la energía total en la ecuación (10) es:

$$E = m(r,t)\, mc^2 \frac{dt}{d\tau} \tag{11}$$

y el momento angular total de la ecuación (10) es:

$$L = mr^2 \omega \frac{dt}{d\tau} \tag{12}$$

Por definición:

$$d\underline{r} \cdot d\underline{r} = n(r,t)\, dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{13}$$

de manera que:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(m(r,t) - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \tag{14}$$

a partir del hamiltoniano (10). Expresada en forma completa, la energía total es:

$$E = m(r,t) \left(m(r,t) - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} mc^2 \tag{15}$$

y en general no es constante. Sin embargo, el hamiltoniano es constante.

Con las definiciones (4) y (5), la Ec. (3) deviene:

$$mc^2 = \frac{E^2}{mc^2} - m\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{L^2}{mr^2} \tag{16}$$

y así:

$$m\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = m\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = \frac{mL^2}{m^2 r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{E^2}{mc^2} - mc^2 - \frac{L}{mr^2} \tag{17}$$

Por lo tanto, la ecuación orbital es:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^4 \left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2 L^2} - \frac{1}{r^2} \right) \tag{18}$$

y puede expresarse como:

$$\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)=x \tag{19}$$

donde

$$x=\frac{E^2-m^2c^4}{c^2L^2} \tag{20}$$

Se considera que la órbita es observable mediante astronomía, y en general es:

$$f'(\theta)=\frac{dr}{d\theta} \tag{21}$$

de manera que la Ec. (19) es la ecuación orbital general para todas las órbitas. La teoría de Newton para las órbitas [12] da el resultado:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{r^4}{L^2}\left(2m\left(E-V-\frac{L^2}{2mr^2}\right)\right) \tag{22}$$

donde E es la energía total clásica definida por :

$$E=T+V \tag{23}$$

donde T es la energía cinética clásica y V es la energía potencial clásica. En la Ec. (22), L es el momento angular total clásico. En dinámica clásica [12], E y L son constantes de movimiento, y no hay concepto de masa en reposo, como es bien conocido. En dinámica clásica:

$$H=E \tag{24}$$

el hamiltoniano y la energía total son iguales. En dinámica newtoniana, la energía potencial de atracción entre *m* y M es:

$$V=-\frac{mMG}{r} \tag{25}$$

donde G es la constante de Newton. La cantidad:

$$E_r = \frac{L^2}{2mr^2} \tag{26}$$

proviene de la energía cinética rotacional, pero se conoce incorrectamente como la "fuerza" centrífuga de repulsión. Esto constituye una bien conocida falacia de la dinámica newtoniana. Si aceptamos esto por una simple cuestión de argumento, la teoría de Newton genera una órbita elíptica:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\theta} \tag{27}$$

donde la mitad de la latitud recta es:

$$\alpha = \frac{L^2}{m^2 M G} \tag{28}$$

y donde la excentricidad es:

$$\epsilon = \left(1 + \frac{2L^2 E}{m^3 M^2 G^2}\right)^{1/2} \tag{29}$$

A partir de la Ec. (27):

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^4 \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^2 \left(r^2 - \frac{1}{\epsilon^2}(\alpha - r)^2\right) \tag{30}$$

Utilizando el resultado newtoniano (22) en la ecuación orbital (19) da:

$$\frac{2mT}{L^2} \longleftarrow \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2 L^2} \tag{31}$$

es decir:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right) \longrightarrow T \tag{32}$$

en donde la energía total viene definida por la Ec. (4). En el límite:

$$v \ll c \tag{33}$$

la energía cinética T deviene

$$T = \frac{mc^2}{2}\left(\gamma^2 - 1\right)$$

es

$$= \frac{mc^2}{2}\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - 1\right) \sim \frac{mc^2}{2}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2} m \quad {}^2 \tag{34}$$

que es el resultado newtoniano, en forma totalmente consistente. En general, la nergía cinética newtoniana no es una constante a menos de que v^2 sea una constante. La (32) puede interpretarse como una definición de la energía cinética en una teoría en l ue se permite que v varíe dentro de la transformación de Lorentz. Esto constituye una teo de la relatividad satisfactoria para un valor general de v, y en consecuencia es una teo de la relatividad general.

Puede obtenerse una segunda ecuación orbital a partir de la E 7), y que es:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right). \tag{35}$$

El momento lineal relativista de esta teoría es:

$$\underline{p} = \gamma m \underline{v} \tag{36}$$

donde $\underline{v}$ varía. En relatividad restringida, la Ec. (36) también se cumple, pero ; una constante. A partir de la Ec. (36) se deduce [1 - 10, 12] que:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{37}$$

de manera que la Ec. (19) puede expresarse como:

$$\frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right) = \left(\frac{p}{L}\right)^2 \tag{38}$$

,v

en donde:

$$\left(\frac{p}{L}\right)^2 = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2L^2} = \frac{(\gamma^2-1)m^2c^4}{c^2L^2} \tag{39}$$

en
Ec.
a q
ría
ría

de manera que el cuadrado de p es:

$$p^2 = (\gamma^2 - 1)m^2c^2 \tag{40}$$

c. (

Por lo tanto, la ecuación orbital (35) es:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(1+\left(\left(\frac{rp}{L}\right)^2-1\right)^{-1}\right) \tag{41}$$

En el sistema solar, la órbita observada es una elipse con precesión:

$$r=\frac{\alpha}{1+\epsilon\cos(x\theta)} \tag{42}$$

donde x es la constante de precesión. A partir de la Ec.(42):

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{x\epsilon}{\alpha}\right)^2 r^4 \operatorname{sen}(x\theta) \tag{43}$$

y la ecuación orbital (38) deviene:

$$\left(\frac{p}{L}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left(1+r^2\left(\frac{x\epsilon}{\alpha}\right)^2\operatorname{sen}^2(x\theta)\right). \tag{44}$$

La órbita se describe en términos de la relación entre p y L.

3. Métrica restringida de Minkowski y aplicaciones.

Puede desarrollarse un método equivalente notando que:

$$d\theta^2=\left(\frac{\alpha}{x\epsilon r^2\operatorname{sen}(x\theta)}\right)^2 dr^2 \tag{45}$$

donde:

$$\operatorname{sen}^2(x\theta)=1-\frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{\alpha}{r}-1\right)^2 \tag{46}$$

Utilizando la Ec. (45) en la Ec. (1) produce el elemento lineal restringido de Minkowski:

$$ds^2=c^2d\tau^2=c^2dt^2-A\,dr^2 \tag{47}$$

donde:

$$A=1+\left(\frac{\alpha}{x\epsilon r^2\operatorname{sen}(x\theta)}\right)^2 \tag{48}$$

Por definición:

$$d\underline{r} \cdot d\underline{r} = A\,dr^2 = v^2 dt^2 \tag{49}$$

de manera que la velocidad es:

$$v = A^{1/2} \frac{dr}{dt} \tag{50}$$

y, consistentemente, no es una constante.

La constante de movimiento a partir de la Ec. (47) viene definida por:

$$\mathcal{L} = H = \frac{1}{2} mc^2 = \frac{1}{2} mc^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2} mA \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \tag{51}$$

y la Ec.(51) es:

$$mA\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{mc^2} - mc^2. \tag{52}$$

Definiendo el momento relativista mediante:

$$p = A^{1/2} m \frac{dr}{d\tau} \tag{53}$$

la Ec.(52) deviene:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{54}$$

que posee el mismo formato que la ecuación de energía de Einstein. Puede expresarse como:

$$p^{\mu} p_{\mu} = m^2 c^2 \tag{55}$$

pero se la considera como una ecuación de relatividad general porque v no es constante. Si la órbita general se define mediante la función:

$$f'(\theta) = \frac{dr}{d\theta} \tag{56}$$

entonces la A general es:

$$A = 1 + \left(\frac{r}{f'(\theta)}\right)^2. \tag{57}$$

En esta representación, la ecuación orbital general es:

$$\frac{dr}{d\theta} = r\left(A-1\right)^{-1/2} \tag{58}$$

A partir de la Ec. (52):

$$\left(f'(\theta)\right)^2 = \frac{r^4}{A}\left(\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2L^2}\right) \tag{59}$$

de manera que:

$$\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2L^2} = \left(\frac{A}{A-1}\right)\frac{1}{r^2} \tag{60}$$

entonces, para todas las órbitas:

$$\left(\frac{rp}{L}\right)^2 = \frac{A}{A-1} . \tag{61}$$

Estos resultados pueden ilustrarse para órbitas en espiral como en la Tabla 1.

Tabla 1: Resultados para Órbitas en Espiral

Espiral	**Órbita**	**dr / dθ**	**A**
Logarítmica	$r = r_0 e^{\alpha\theta}$	αr	$1 + \frac{1}{\alpha^2}$
Hyperbólica	$r = \frac{r_0}{\theta}$	$-r^2/r_0$	$1 + (r_0/r)^2$
Arquímedes	$r = a + b\theta$	b	$1 + (r/b)^2$
Fermat	$r = r_0\theta^{1/2}$	$\frac{1}{2}(r_0^2/r)$	$1 + (2r^2/r_0^2)^2$
Lituus	$r = \frac{r_0}{\theta^{1/2}}$	$-\frac{r^3}{2r_0^2}$	$1 + \left(\frac{2r_0^2}{r^2}\right)^2$

Cada órbita se describe mediante las ecuaciones:

$$a = \frac{L}{mc} , \quad b = \frac{cL}{E} \tag{62}$$

de manera que:

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2L^2} \tag{63}$$

En estas ecuaciones, el momento lineal relativista es:

$$p = A^{1/2} \gamma m \frac{dr}{dt} \tag{64}$$

y el momento angular relativista es:

$$L = \gamma m r^2 \omega \frac{dr}{dt} , \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} , \tag{65}$$

de manera que:

$$\left(\frac{pr}{L}\right)^2 = \frac{A}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{A}{A-1} \tag{66}$$

dando la ecuación orbital en el formato:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^2}{A-1} . \tag{67}$$

En términos de la relación entre p y L, pueden describirse varias órbitas como sigue. La órbita elíptica con precesión se describe mediante:

$$\left(\frac{p}{L}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{x\epsilon}{\alpha} \operatorname{sen}(x\theta)\right)^2 . \tag{68}$$

La órbita en espiral logarítmica se describe mediante:

$$\left(\frac{p}{L}\right)^2 = \frac{1+\alpha^2}{r^2} \tag{69}$$

La órbita en espiral hiperbólica se describe mediante:

$$\left(\frac{p}{L}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_0^2} \tag{70}$$

y la elipse newtoniana mediante:

$$\left(\frac{p}{L}\right)^2 = \frac{2mT}{L^2} . \tag{71}$$

Utilizando la ecuación orbital en la forma (35), la órbita en espiral logarítmica se describe mediante:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \tag{72}$$

y la espiral hiperbólica mediante:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) . \tag{73}$$

En el límite de un valor infinito de *r* esta ecuación deviene:

$$v \longrightarrow \frac{dr}{dt} \tag{74}$$

es decir, deviene un ecuación de relatividad restringida en la que *v* es constante. Este resultado puede observarse a partir del hecho de que A, para la espiral hiperbólica, adquiere el valor unitario para un valor infinito de *r*. Esto es precisamente lo que se observa a nivel experimental en la bien conocida curva de velocidad de una galaxia en espiral, en la que las estrellas forman una espiral hiperbólica.

Finalmente, la métrica restringida (49) puede utilizarse para calcular las tétradas, la torsión y la curvatura en la geometría de Cartan, lo cual demuestra que sin duda se trata de una métrica de relatividad general. Se la prefiere en comparación con el más complicado elemento lineal (9), aplicando el Principio de Simplicidad o Navaja de Ockham.

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y el título de Armígero otorgados a MWE, y al equipo técnico de AIAS y otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por sus publicaciones voluntarias en el portal, y a Alex Hill, Robert Cheshire y Simon Clifford por las traducciones y grabaciones. AIAS se ha establecido bajo el patrocinio del Fideicomiso de la Familia Newlands.

Referencias.

[1] M. W. Evans, Ed., J. Found. Phys. Chem., (junio 2011en adelante, seis publicaciones anuales, www.cisp-publishing.com).

[2] M. W. Evans, S. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (Cambridge International Science Publishing, CISP, www.cisp-publishing.com, 2011).

[3] Los portales de la teoría ECE , www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.et3m.net, www.upitec.org).

[4] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2007). Hay traducción al castellano en la Sección en Español del portal www.aias.us ,

[5] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis, 2005 - 2011) en siete volúmenes.

[6] K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (CISP, 2011).

[7] M. W. Evans y S. Kielich (Eds.), "Modern Nonlinear Optics" (Wiley, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001), en dos ediciones y seis volúmenes.

[8] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).

[9] M .W. Evans y J.-P Vigier, "The Enigmatic Photon (Kluwer 1994 a 2002, encuadernación en tapa dura o blanda) en diez volúmenes.

[10] M . W. Evans and A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific 1994).

[11] S. P. Carroll, "Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004).

[12] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics of Particles and Systems" (HBC College Publishing, Nueva York, tercera edición, 1988).