Demostración de la antisimetría de la conexión de Christoffel a partir de la Identidad de Cartan.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,

Civil List, AIAS y UPITEC
(www.aias.us, www.webarchive.org.uk,www.atomicprecision.com, www.upitec.org, www.et3m.net)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen

A través de consideraciones de la identidad de Cartan de la geometría diferencial, se demuestra en forma concluyente que la conexión de Christoffel es siempre antisimétrica para una torsión y curvatura distintas de cero. Esta demostración desbarata un siglo de dogma, el cual afirmaba en forma arbitraria que la conexión de Christoffel era simétrica. La relatividad general einsteiniana se basa en este dogma y resulta, en consecuencia, incorrecta y obsoleta. La teoría de Einstein, Cartan y Evans emplea la correcta antisimetría y la torsión del espaciotiempo distinta de cero.

Palabras clave: Teoría ECE, identidad de Cartan, demostración de la antisimetría de la conexión de Christoffel, torsión distinta de cero.

1. Introducción.

En recientes documentos de esta serie [1 – 10] la teoría general de la relatividad einsteiniana (RGE) fue refutada en forma concluyente mediante el empleo de un álgebra sencilla, tal como puede observarse en el documento UFT202 en el portal www.aias.us. La RGE se basaba en un siglo de dogma que se originó en una geometría incorrecta. El punto preciso en el cual las matemáticas tomaron un giro equivocado fue en la asignación de una simetría incorrecta a la conexión de Christoffel [11]. En los libros de texto del siglo XX, la RGE casi siempre se describe en términos de una conexión que es simétrica en sus dos índices inferiores. La conexión fue un concepto introducido por Christoffel en la década de 1860. Riemann sólo infirió la métrica. A principios del siglo XX, Levi Civita, Ricci y sus colaboradores infirieron el tensor de curvatura. Este último casi siempre se atribuye erróneamente a Riemann. Toda la geometría de la RGE se basó en la conexión simétrica, la cual se tomó desde un principio como axiomática. Por ejemplo, la primera y segunda identidad de Bianchi de la geometría de la RGE se cumplen si y sólo si la conexión es simétrica. Einstein basó su ecuación de campo directamente en la segunda identidad de Bianchi [1 – 11], de manera que la ecuación de campo se cumple si y sólo si la conexión es simétrica. Todas las inferencias basadas en la ecuación de campo se cumplen si y sólo si la conexión es simétrica. Todas las soluciones de la ecuación se cumplen si y sólo si la conexión es simétrica.

La principal contribución de Einstein a la física fue el concepto de que puede basarse en una clase de geometría que es más general que aquella heredada de los antiguos filósofos, tales como Euclides. Resultaba natural, en la época del desarrollo de la ecuación de campo de Einstein (alrededor de 1905 a 1915) el empleo de la entonces nueva geometría de Levi-Civita, Ricci, Bianchi y otros, una geometría basada en una conexión simétrica. Estas ideas le fueron transmitidas a Einstein por el matemático Marcel Grossman. En retrospectiva histórica, no resulta claro por qué se supuso que la conexión fuese simétrica. En realidad no existe argumento convincente alguno al respecto. La ecuación de campo se publicó en noviembre de 1915 e inmediatamente fue criticada por Schwarzschild en diciembre de ese mismo año [12]. Poco tiempo después fue criticada por otros líderes intelectuales, tales como Bauer y Schroedinger. Desafortunadamente, Eddington y sus colegas afirmaron incorrectamente, alrededor de 1919, haber verificado la teoría mediante observaciones de la desviación de los rayos de luz, pero esto fue rechazado por muchos otros, y continuó siendo rechazado. Siempre ha existido cierta sensación incómoda acerca de la RGE en aquellos círculos intelectuales con suficiente capacidad como para comprenderla. Al grupo de los críticos luego se agregaron Levi-Civita, Dirac y el mismo Eddington.

A principios de la década de 1920, Cartan [1 – 11] realizó varias contribuciones importantes a las matemáticas, en especial la identidad de Cartan de la geometría diferencial. Esta es una identidad exacta que involucra a la curvatura y a la torsión del espaciotiempo. Esta última brilla por su ausencia en la RGE. En la Sección 2 de este documento, la identidad de Cartan se resume en diferentes tipos de notaciones y se expresa en forma completa mediante notación tensorial. En la Sección 3 se demuestra en forma concluyente que la identidad de Cartan implica que la conexión de Christoffel debe de ser antisimétrica en sus dos índices inferiores, ya que de lo contrario se derrumba la geometría al transformarse en geometría de Minkowski, en la que desaparecen tanto la curvatura como la torsión. Esto significa que la RGE carece de sentido y resulta obsoleta. La demostración no resulta técnicamente difícil, y para los científicos ello significa el fin de la era einsteiniana. Demuestra que los varios otros argumentos en favor de una conexión antisimétrica [1 – 10] son correctos.

2. La identidad de Cartan.

En la notación abreviada utilizada en la serie de documentos de la teoría ECE [1 – 10] la identidad de sencilla:

$$D \wedge T := R \wedge q \,. \tag{1}$$

Aqui, $D\,\wedge$ es la derivada exterior con un término de conexión de espín agregado [11], T denota la torsión, R denota la curvatura, q denota la tétrada y $\wedge$ denota el producto cuña. Estas ideas fueron en su mayoría inferidas por Cartan y su colega Maurer, siete u ocho años después de que la RGE hubiese sido desarrollada sin considerar a la torsión T. Cartan informó a Einstein del error básico de su geometría, pero para entonces éste había sido catapultado a la fama, y se había transformado en el ídolo de la caverna. Ésta pareciera ser la única forma de explicar por qué Einstein ignoró los razonamientos de Cartan. Ello dio origen a una era catastrófica para la física, una era en la que se degeneró hacia el interminable dogma de la RGE.

En la notación de la geometría diferencial, también inferida en su mayoría por Cartan, la identidad es:

$$D \wedge T^a := R^a_{\ b} \wedge q^b \tag{2}$$

Cuando los productos cuña se expresan en forma completa, la Ec. (2) deviene:

$$\partial_\mu T^a_{\ \nu\rho} + \partial_\rho T^a_{\ \mu\nu} + \partial_\nu T^a_{\ \rho\mu} + \omega^a_{\mu b} T^b_{\ \nu\rho} + \omega^a_{\rho b} T^b_{\ \mu\nu}$$

$$+ \omega^a_{\nu b} T^b_{\ \rho\mu} := R^a_{\ \mu\nu\rho} + R^a_{\ \rho\mu\nu} + R^a_{\ \nu\rho\mu} \tag{3}$$

en donde los índices aparecen en forma completa [1 – 11]. En la Ec. (3), $\omega^a_{\mu b}$ es la conexión de espín de Cartan, otra contribución fundamental para las matemáticas. El tensor de torsión viene definido por:

$$T^a_{\mu\rho} = \left(\Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\right) q^a_\lambda \tag{4}$$

donde $\Gamma^\lambda_{\mu\rho}$ es la conexión de Christoffel. En la RGE ésta última es simétrica en sus dos índices inferiores:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\rho} = ?\ \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \tag{5}$$

y en consecuencia la torsión desaparece y la identidad de Cartan deviene la incorrecta y obsoleta primera "identidad" de Bianchi:

$$R^a_{\mu\nu\rho} + R^a_{\rho\mu\nu} + R^a_{\nu\rho\mu} = ?\ 0 \tag{6}$$

El Teorema de Leibniz [11] implica:

$$\partial_\mu\left(\left(\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\right) q^a_\lambda\right) = q^a_\lambda \partial_\mu\left(\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\right) + \left(\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\right)\partial_\mu q^a_\lambda \tag{7}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^a_{\nu\rho} + \omega^a_{\mu b} T^b_{\nu\rho} &= \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\right) q^a_\lambda \\ &+ \left(\partial_\mu q^a_\lambda + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda\right)\left(\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora reetiquetamos los indices de sumatoria en el segundo término a la derecha de la igualdad de la Ec. (8):

$$\lambda \longrightarrow \sigma \tag{9}$$

para obtener:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^a_{\nu\rho} + \omega^a_{\mu b} T^b_{\nu\rho} &= \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\right) q^a_\lambda \\ &+ \left(\partial_\mu q^a_\sigma + \omega^a_{\mu b} q^b_\sigma\right)\left(\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Utilizamos el postulado de la tétrada de Cartan [1 – 11]

$$\partial_\mu q^a_\sigma + \omega^a_{\mu b} q^b_\sigma = \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} q^a_\lambda \tag{11}$$

para hallar que:

$$\partial_\mu T^a_{\nu\rho} + \omega^a_{\mu b} T^b_{\nu\rho}$$

$$= \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\left(\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\right)\right) q^a_\lambda \tag{12}$$

Se obtienen resultados similares para los otros términos de la suma cíclica en la Ec.(3). Utilizando la definición:

$$R^a_{\rho\mu\nu} = R^\lambda_{\rho\mu\nu} q^a_\lambda \tag{13}$$

la identidad de Cartan deviene:

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\mu} \; &:= \\ \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\left(\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\right) &+ \\ \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\left(\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\right) &+ \\ \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\left(\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\right) &. \end{aligned} \tag{14}$$

Se observa que la segunda ecuación estructural de Cartan Maurer:

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \tag{15}$$

es una solución de la Ec. (14). La ecuación estructural aparece tres veces en la identidad de Cartan, que es la suma cíclica de tres ecuaciones de la segunda estructura. Esto constituye un resultado de una elegancia suprema, ya que se trata de una identidad exacta dada la segunda ecuación estructural. Esto último es equivalente a la definición del tensor de curvatura.

3. Demostración de la conexión antisimétrica.

Consideremos la identidad en el formato:

$$
\begin{aligned}
R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} + R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} + R^{\lambda}{}_{\nu\rho\mu} :=\; & \partial_\mu T^{\lambda}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} T^{\sigma}{}_{\nu\rho} \\
+\; & \partial_\rho T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma} T^{\sigma}{}_{\mu\nu} \\
+\; & \partial_\nu T^{\lambda}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} T^{\sigma}{}_{\rho\mu} .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Se observa que la siguiente ecuación es una solución:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu T^{\lambda}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} T^{\sigma}{}_{\nu\rho} \tag{17}$$

así como los son permutaciones cíclicas de esta ecuación, es decir:

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\rho T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma} T^{\sigma}{}_{\mu\nu} \tag{18}$$

y

$$R^{\lambda}{}_{\nu\rho\mu} = \partial_\nu T^{\lambda}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} T^{\sigma}{}_{\rho\mu} . \tag{19}$$

Estas soluciones muestran que la conexión es antisimétrics, ya que de lo contrario tanto la torsión como la curvatura desaparecen y el espacio se colapsa a un espacio plano. Ahora elevemos los índices en ambos lados de la ecuación a fin de obtener una ecuación como:

$$\partial_\mu T^{\lambda\nu\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu\rho} = R^{\lambda\nu\rho}{}_{\mu} . \tag{20}$$

Finalmente, consideremos el caso especial:

$$\partial_\mu T^{\lambda\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} T^{\sigma\mu\rho} = R^{\lambda\mu\rho}_{\ \ \ \ \mu}. \tag{21}$$

Esta es la identidad de Evans, Q.E.D. [1 – 10]. La Ec. (21) se cumple para cada índice μ, de manera que los índices μ repetidos pueden sumarse. La identidad de Evans se ha demostrado en forma independiente en documentos previos [1 – 10] utilizando duales de Hodge.

Es bien sabido [1 – 11] que el conmutador de derivadas covariantes actúa sobre un vector V^ρ para dar:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho \tag{22}$$

Si

$$\mu = \nu \tag{23}$$

el conmutador se convierte en el operador nulo y tanto la conexión, como la torsión y la curvatura desaparecen. La conexión debe ser antisimétrica para una torsión y curvatura distintas de cero, Q.E.D. La conexión no puede tener una componente simétrica. Bajo la transformación general de coordenadas aparece en la conexión un término no homogéneo. Este término no homogéneo es, sin embargo, simétrico en sus dos índices inferiores y en consecuencia desaparece. Por lo tanto, la conexión es un tensor. En RGE no se le consideraba un tensor debido al término no homogéneo.

Agradecimientos.

Se agradece el Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y el rango de Armígero para MWE. Se agradece al equipo técnico de AIAS y a muchos otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a David Burleigh por su publicación en la red, a Alex Hill, Robert Cheshire y Simon Clifford por las traducciones y grabaciones. AIAS se ha establecido bajo el patrocinio del Fideicomiso de la Familia Newlands (2011).

Referencias.

[1] M. W. Evans, Ed., "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (Cambridge International Science Publishing, CISP, www.cisp-publishing.com, Primavera 2012) en encuadernación dura, blanda y libro-e, número especial seis de la referencia (2).

[2] M .W. Evans, Ed., Journal of Foundations of Physics and Chemistry, CISP desde el mes

de junio de 2011,seis publicaciones anuales.

[3] M. W. Evans, S. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP, Primavera 2011).

[4] K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (CISP, Primavera 2011).

[5] M .W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, Suffolk, 2005 a 2011), en siete volúmenes.

[6] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007, traducido al castellano por Alex Hill en la Sección en Español del portal www.aias.us).

[7] M .W. Evans y S. Kielich, Eds, "Modern Nonlinear Optics" (Wiley, 1992, reimpreso en 1993, 1997 (encuadernación blanda), y 2001 segunda edición en encuadernación dura y libro-e), en seis volúmenes.

[8] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific 2001).

[9] M. W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 a 2002, encuadernación dura y blanda), en diez volúmenes.

[10] M .W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).

[11] S. P. Carroll, "Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004, y apuntes en línea de 1997).

[12] A. A. Vankov, en línea, análisis crítico del documento original de Einstein de noviembre de 1915 y traducción de la carta a Einstein de K. Schwarzchild, del 22 diciembre 1915, www.wbabin.net/eeuro/vankov.pdf.