Solución analítica del problema gravitacional para el caso de N partículas.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,
Civil List y AIAS

(www.aias.us, www.webarchive.org.uk, www.atomicprecision.com, www.upitec.org, www.et3m.net)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se presenta la primera solución analítica del problema gravitacional con N partículas en juego, en términos de órbitas de pares de partículas junto con una novedosa ecuación restrictiva. Se demuestra que, en general, el lagrangiano para N partículas puede factorizarse en una suma de dos lagrangianos de partículas, para los cuales existe una solución conocida. Cada órbita de dos partículas se encuentra interrelacionada a través de la ecuación restrictiva. En el límite newtoniano cada órbita de dos partículas es una elipse, y en forma más general se trata de una sección cónica con precesión, poseedora de una gran riqueza matemática inherente.

Palabras clave: Límite clásico de la teoría ECE, solución al problema gravitacional con N partículas.

1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie sobre las aplicaciones de la teoría ECE [1- 10] se ha demostrado que las secciones cónicas con precesión poseen una riqueza matemática inherente en teoría gravitacional [11] a nivel de dos partículas. En este documento se extiende el análisis al conocido problema para un número N de partículas en gravitación, en el cual una partícula interactúa con otras N - 1 partículas. En la Sección 2 se presenta la primera solución analítica de este problema mediante la factorización del lagrangiano en un conjunto de N! / ((N - 2)! 2!) ecuaciones de órbitas con dos partículas. Se deduce una novedosa ecuación restrictiva para órbitas planas a partir de las propiedades vectoriales unitarias fundamentales del sistema de coordenadas cilíndricas planas. La ecuación restrictiva interrelaciona las órbitas de cada par de partículas, de manera tal que el movimiento orbital de una partícula depende de las otras N - 1 partículas. En el sistema solar dichos órbitas parecieran ser estables, pero aún en el nivel newtoniano las órbitas del problema de N partículas poseen en general una gran riqueza de estructura matemática. La consideración adicional del fenómeno de precesión, al igual que en los documentos inmediatamente precedentes en esta serie constituye un tema completamente nuevo en el campo de la cosmología. En la Sección 3 se representan gráficamente, con fines ilustrativos, algunas de las características de la nueva solución. Esto parece ser la primera solución analítica del problema gravitacional para el caso de N partículas obtenido durante los últimos cuatrocientos años aproximadamente.

2. Solución analítica.

Consideremos la interacción gravitacional entre tres partículas con masas m_1, m_2 y m_3. Esto se conoce como "el problema de las tres partículas". Supongamos que los partículas interactúan con el potencial de Hooke Newton [11]. Por lo tanto, el lagrangiano es igual a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_1|^2 + m_2|\dot{\underline{r}}_2|^2 + m_3|\dot{\underline{r}}_3|^2\right) - \frac{m_1 m_2 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} - \frac{m_1 m_3 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_3|} - \frac{m_2 m_3 G}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_3|} \tag{1}$$

La coordenada radial para cada partícula es $\underline{r}_i$, $i = 1, 2, 3$ y G es una constante de Newton. Notemos ahora que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3\right) \tag{2}$$

donde:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_1|^2 + m_2|\dot{\underline{r}}_2|^2\right) - \frac{2 m_1 m_2 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_1|^2 + m_3|\dot{\underline{r}}_3|^2\right) - \frac{2 m_1 m_3 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_3|} \tag{4}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_2|^2 + m_3|\dot{\underline{r}}_3|^2\right) - \frac{2 m_2 m_3 G}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_3|} \tag{5}$$

El lagrangiano de tres partículas se ha factorizado en la suma de tres lagrangianos de dos partículas. Análogamente, puede demostrarse que el lagrangiano de cuatro partículas se factoriza en una suma de seis lagrangianos de dos partículas. En general, el lagrangiano de N partículas se factoriza en una suma de N! / ((N - 2)! 2!) lagrangianos de dos partículas.

Los lagrangianos (3) a (5) pueden expresarse en el formato (véanse notas de acompañamiento del documento UFT219 en el portal www.aias.us):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu_i \left|\dot{\underline{R}}_i\right|^2 - U(R_i), \quad i = 1, 2, 3 \tag{6}$$

Aquí:

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}, \quad \mu_3 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} \tag{7}$$

y el potencial es:

$$U_1 = -\frac{2 m_1 m_2 G}{R_1}, \quad U_2 = -\frac{2 m_1 m_3 G}{R_2}, \quad U_3 = -\frac{2 m_2 m_3 G}{R_3} \tag{8}$$

En coordenadas polares cilíndricas en un plano:

$$\underline{r} = r\,\underline{e}_r \tag{9}$$

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\underline{e}_r\right) \tag{10}$$

y los vectores unitarios del sistema se definen mediante:

$$\underline{e}_r = \underline{i}\cos\theta + \underline{j}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{11}$$

$$\underline{e}_\theta = -\underline{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \underline{j}\cos\theta \tag{12}$$

En la Ec. (10):

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\,\dot{\underline{e}}_r \tag{13}$$

y para cada partícula:

$$\underline{r}_i = r_i \underline{e}_r \tag{14}$$

$$\dot{\underline{r}}_i = \dot{r}_i \underline{e}_r + r_i \dot{\underline{e}}_r \tag{15}$$

Nótese cuidadosamente que θ no depende de *i*, porque está definido por:

$$\dot{\underline{e}}_r = \frac{d \underline{e}_r}{dt} \tag{16}$$

donde $\underline{e}_r$ es un vector unitario. En consecuencia:

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \, \underline{e}_\theta \tag{17}$$

y $\dot{\theta}$ no posee un subíndice *i*. Para cada partícula las ecuaciones de Euler Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial R_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{R}_i} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\theta}} \tag{19}$$

Esto puede combinarse en [1 – 11]:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{R_i}\right) + \frac{1}{R_i} = -\frac{\mu_i R_i^2}{L_i^2} F_i(R_i) \tag{20}$$

en donde el momento angular conservado es:

$$L_i = \mu_i R_i^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{21}$$

y en el cual la fuerza es:

$$F_i = -\frac{\partial U_i}{\partial R_i} , \tag{22}$$

Las soluciones de las Ecs. (20) son [1 – 11]:

$$R_i = \frac{\alpha_i}{1+\epsilon_i \cos\theta} \tag{23}$$

donde:

$$\alpha_i = \frac{L_i^2}{\mu_i k_i} , \tag{24}$$

$$\epsilon_i = \left(1 + \frac{2 E_i L_i^2}{\mu_i k_i^2}\right)^{1/2} , \tag{25}$$

$$k_1 = 2 m_1 m_2 G \quad , \quad k_2 = 2 m_1 m_3 G \quad , \quad k_3 = 2 m_2 m_3 G \tag{26}$$

Por lo tanto hay tres órbitas:

$$R_1 = \frac{\alpha_1}{1+\epsilon_1 \cos\theta} , \tag{27}$$

$$R_2 = \frac{\alpha_2}{1+\epsilon_2 \cos\theta} , \tag{28}$$

$$R_3 = \frac{\alpha_3}{1+\epsilon_3 \cos\theta} , \tag{29}$$

para cada par de partículas. En la obtención de estas soluciones, los centros de masa de cada par de partículas vienen definidos por:

$$m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = \underline{0} \quad , \quad \underline{R}_1 = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2| , \tag{30}$$

$$m_1 \underline{r}_1 + m_3 \underline{r}_3 = \underline{0} \quad , \quad \underline{R}_2 = |\underline{r}_1 - \underline{r}_3| , \tag{31}$$

$$m_2 \underline{r}_2 + m_3 \underline{r}_3 = \underline{0} \quad , \quad \underline{R}_3 = |\underline{r}_2 - \underline{r}_3| , \tag{32}$$

A partir de las Ecs. (23) se obtiene la siguiente ecuación restrictiva:

$$\cos\theta = \frac{1}{\epsilon_i}\left(\frac{\alpha_i}{R_i} - 1\right) , \quad i = 1, 2, 3 \tag{33}$$

lo cual da origen a tres ecuaciones adicionales:

$$\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{\alpha_1}{R_1}-1\right)=\frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{\alpha_2}{R_2}-1\right) \quad (34)$$

$$\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{\alpha_1}{R_1}-1\right)=\frac{1}{\epsilon_3}\left(\frac{\alpha_3}{R_3}-1\right) \quad (35)$$

$$\frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{\alpha_2}{R_2}-1\right)=\frac{1}{\epsilon_3}\left(\frac{\alpha_3}{R_3}-1\right). \quad (36)$$

Para hallar tres ecuaciones adicionales, se utiliza:

$$\alpha_i = \frac{L_i^2}{\mu_i k_i} = \frac{\mu_i r_i^2}{k_i}\frac{d\theta}{dt} \quad (37)$$

lo cual da:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\left(\frac{m_1+m_3}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2, \quad (38)$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=\left(\frac{m_2+m_3}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{R_1}{R_3}\right)^2, \quad (39)$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=\left(\frac{m_2+m_3}{m_1+m_3}\right)\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2.$$

Existen al menos nueve ecuaciones disponibles para nueve incógnitas: R_1, R_2, R_3, α_1, α_2, α_3, ε_1, ε_2 y ε_3, de manera que el problema puede resolverse analíticamente, Q.E.D.

Por ejemplo, la solución para R_3 es:

$$R_3=\alpha_3\left(1-\frac{\epsilon_3}{\epsilon_2}\left(\frac{\alpha_2-R_2}{R_2}\right)\right) \quad (40)$$

donde:

$$R_2=\alpha_2\left(1-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\left(\frac{\alpha_1-R_1}{R_1}\right)\right) \quad (41)$$

y

$$R_1=\frac{\alpha_1}{1+\epsilon_1\cos\theta}. \quad (42)$$

Se observa que las órbitas están interrelacionadas. Para el problema de las N partículas del límite newtoniano:

$$\cos\theta=\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{\alpha_1}{R_1}-1\right)=\dots=\frac{1}{\epsilon_i}\left(\frac{\alpha_i}{R_i}-1\right) \quad (43)$$

$$i=1,\dots,N,$$

de manera que alcanzamos la importante conclusión que el problema para N partículas puede resolverse analíticamente, utilizando álgebra computacional para enfrentar la tediosa complejidad. Para órbitas con precesión, cada una con un factor x la ecuación restrictiva deviene:

$$\theta = \frac{1}{x_1} \cos^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{\alpha_1}{R_1} - 1\right)\right) = \ldots = \frac{1}{x_i} \cos^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon_i}\left(\frac{\alpha_i}{R_i} - 1\right)\right), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{44}$$

Este método producirá una variedad esencialmente infinita de órbitas previamente desconocidas.

Finalmente en esta sección se ilustra la solución analítica general y el procedimiento a seguir con el problema de las cuatro partículas. El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_1|^2 + m_2|\dot{\underline{r}}_2|^2 + m_3|\dot{\underline{r}}_3|^2 + m_4|\dot{\underline{r}}_4|^2\right) - \frac{m_1 m_2 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} - \frac{m_1 m_3 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_3|} - \frac{m_2 m_3 G}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_3|} - \frac{m_1 m_4 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_4|} - \frac{m_2 m_4 G}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_4|} - \frac{m_3 m_4 G}{|\underline{r}_3 - \underline{r}_4|} \tag{45}$$

y se factoriza en la suma de seis lagrangianos de dos partículas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{3}\left(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_6\right) \tag{46}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_1|^2 + m_2|\dot{\underline{r}}_2|^2\right) - \frac{3 m_1 m_2 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \\
\mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_1|^2 + m_3|\dot{\underline{r}}_3|^2\right) - \frac{3 m_1 m_3 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_3|} \\
\mathcal{L}_3 &= \frac{1}{2}\left(m_2|\dot{\underline{r}}_2|^2 + m_3|\dot{\underline{r}}_3|^2\right) - \frac{3 m_2 m_3 G}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_3|} \\
\mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2}\left(m_1|\dot{\underline{r}}_1|^2 + m_4|\dot{\underline{r}}_4|^2\right) - \frac{3 m_1 m_4 G}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_4|} \\
\mathcal{L}_5 &= \frac{1}{2}\left(m_2|\dot{\underline{r}}_2|^2 + m_4|\dot{\underline{r}}_4|^2\right) - \frac{3 m_2 m_4 G}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_4|} \\
\mathcal{L}_6 &= \frac{1}{2}\left(m_3|\dot{\underline{r}}_3|^2 + m_4|\dot{\underline{r}}_4|^2\right) - \frac{3 m_3 m_4 G}{|\underline{r}_3 - \underline{r}_4|}
\end{aligned} \tag{47}$$

Los seis centros de masa de cada par de partículas se definen mediante:

$$
\begin{aligned}
m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 &= \underline{0}, & \underline{R}_1 &= |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|, \\
m_2 \underline{r}_2 + m_3 \underline{r}_3 &= \underline{0}, & \underline{R}_2 &= |\underline{r}_2 - \underline{r}_3|, \\
m_1 \underline{r}_1 + m_3 \underline{r}_3 &= \underline{0}, & \underline{R}_3 &= |\underline{r}_1 - \underline{r}_3|, \\
m_1 \underline{r}_1 + m_4 \underline{r}_4 &= \underline{0}, & \underline{R}_4 &= |\underline{r}_1 - \underline{r}_4|, \\
m_2 \underline{r}_2 + m_4 \underline{r}_4 &= \underline{0}, & \underline{R}_5 &= |\underline{r}_2 - \underline{r}_4|, \\
m_3 \underline{r}_3 + m_4 \underline{r}_4 &= \underline{0}, & \underline{R}_6 &= |\underline{r}_3 - \underline{r}_4|,
\end{aligned}
\tag{48}
$$

y las seis masas reducidas mediante:

$$
\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}, \quad \mu_3 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3},
$$

$$
\mu_4 = \frac{m_1 m_4}{m_1 + m_4}, \quad \mu_5 = \frac{m_2 m_4}{m_2 + m_4}, \quad \mu_6 = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}. \tag{49}
$$

Finalmente definimos seis órbitas:

$$
R_i = \frac{\alpha_i}{1 + \epsilon_i \cos\theta}, \qquad i = 1, \ldots, 6 \tag{50}
$$

donde:

$$
\alpha_i = \frac{L_i^2}{\mu_i k_i}, \qquad i = 1, \ldots, 6 \tag{51}
$$

$$
\epsilon_i = \left(1 + \frac{2 E_i L_i^2}{\mu_i k_i} \right)^{1/2}, \qquad i = 1, \ldots, 6 \tag{52}
$$

en donde las constantes *k* son:

$$k_1 = 3 m_1 m_2 G\,, \quad k_2 = 3 m_1 m_3 G\,, \quad k_3 = 3 m_2 m_3 G\,,$$

$$k_4 = 3 m_1 m_4 G\,, \quad k_5 = 3 m_2 m_4 G\,, \quad k_6 = 3 m_3 m_4 G\,. \tag{53}$$

La ecuación restrictiva es:

$$\cos\theta = \frac{1}{\epsilon_i}\left(\frac{\alpha_i}{R_i} - 1\right) \quad , \quad i = 1, \ldots, 6 \tag{54}$$

que da:

$$R_{i+1} = \alpha_{i+1}\left(1 - \frac{\epsilon_{i+1}}{\epsilon_i}\left(\frac{\alpha_i - R_i}{R_i}\right)\right), \quad i = 1, \ldots, 6 \tag{55}$$

Por lo tanto:

$$R_{i+2} = \alpha_{i+2}\left(1 - \frac{\epsilon_{i+2}}{\epsilon_{i+1}}\left(\frac{\alpha_{i+1} - R_{i+1}}{R_{i+1}}\right)\right), \tag{56}$$

con R_{i+1} dado por la Ec. (55), y:

$$R_i = \frac{\alpha_i}{1 + \epsilon_i \cos\theta} \tag{57}$$

Mediante el empleo de álgebra computacional es posible extender este procedimiento en forma directa para el caso de N partículas, proporcionando así la primera solución analítica a este problema en casi cuatro siglos. La única suposición es que los centros de masa de cada par pueden definirse en ecuaciones tales como (30) a (32), y esto siempre puede llevarse a cabo.

3. Ilustraciones gráficas de la solución analítica.

Sección por el Dr. Horst Eckardt.

Agradecimientos.

Se agradece el Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS y muchos otros por discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por su publicación en red, y a Alex Hill, Robert Cheshire y Simon Clifford por las traducciones y grabaciones. AIAS se ha establecido (2012) bajo el Patrocinio del Fideicomiso de la familia Newlands.

Referencias.

[1] M. W. Evans, Ed, "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (Cambridge International Science Publishing, CISP, www.cisp-publishing.com, 2012) encuadernación dura, blanda o libro e, número especial seis de la referencia dos.

[2] M .W. Evans, Ed., Journal of Foundations of Physics and Chemistry, (CISP, a partir del mes de junio de 2011, seis publicaciones anuales).

[3] M. W. Evans, S. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP, 2011).

[4] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2005 - 2011), en siete volúmenes.

[5] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis Academic 2007). Existe traducción al castellano por Alex Hill en la Sección en Español del portal www.aias.us .

[6] K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (CISP 2011).

[7] M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley, 1992, 1993, 1997, 2001) en seis volúmenes y dos ediciones.

[8] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).

[9] M. W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 a 2002), en diez volúmenes, encuadernación dura y blanda.

[10] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific 1994).

[11] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics of Particles and Systems" (Harcourt Brace, Nueva York, 3a. Ed., 1988).