La geometría de Cartan de las coordenadas polares planas: dinámica rotacional en términos de la conexión de espín de Cartan.

por

M. W. Evans y H. Eckardt

Civil List y AIAS.

(www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.upitec.org, www.atomicprecision.com, www.et3m.net)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se aplica la geometría de Cartan a las coordenadas polares planas para calcular los elementos de la tétrada y de la conexión de espín, a partir de principios básicos de la geometría. Se demuestra que la torsión de Cartan es distinta de cero para las coordenadas polares planas, refutando así la relatividad general einsteiniana. Esta última supone, incorrectamente, que la torsión es igual a cero. Cálculos sencillos basados en las coordenadas polares planas demuestran que la torsión de Cartan constituye un caso especial de una torsión con una definición más general, un caso especial en el que las conexiones son iguales entre sí y de signo contrario. Estas nuevas técnicas matemáticas se aplican a la dinámica rotacional, y se demuestra que la velocidad angular es una conexión de espín de Cartan.

Palabras clave: Teoría ECE, geometría de Cartan de las coordenadas polares planas, geometría de Cartan de la dinámica rotacional.

1. Introducción.

En esta serie de documentos y libros [1 – 10] se ha desarrollado la teoría ECE del campo unificado covariante generalizada sobre la base de la bien conocida geometría de Cartan [11] en la que se utilizan dos ecuaciones de estructura para definir la torsión y la curvatura. Se ha demostrado que la relatividad general einsteiniana (RGE) es incorrecta debido a que no contempla uno de los postulados fundamentales de la geometría, la torsión de Cartan. En la Sección 2 de este documento se calcula la torsión de Cartan mediante las coordenadas polares planas, y se demuestra que es distinta de cero. Este sencillo ejercicio refuta la RGE porque en cualquier geometría la torsión de Cartan resulta en general distinta de cero. Se demostró en los primeros documentos de la teoría ECE que las tétradas de Cartan pueden definirse mediante el empleo de dos sistemas de coordenadas cualesquiera, en cualquier espacio matemático y en cualquier número de dimensiones. El concepto original de Cartan [1 – 11] utilizaba un espacio-tiempo tangente en el punto P a una variedad (*manifold*) base. El espacio-tiempo tangente en la geometría de Cartan es un espacio-tiempo de Minkowski si se está utilizando una teoría en cuatro dimensiones. Pueden utilizarse diferentes tipos de espacio-tiempos tangenciales. Mediante la superposición de un sistema de coordenadas sobre otro en el mismo espacio matemático, pueden definirse las tétradas en la forma más sencilla imaginable. Esto se llevó a cabo en la Sección 2 mediante el empleo de puntos en el sistema plano de coordenadas polares así como de puntos en el sistema cartesiano. El análisis se reduce al nivel más sencillo posible al considerarse una geometría plana. Un vector puede representarse mediante las coordenadas polares planas [12 – 14]. Los elementos de la tétrada son los componentes cartesianos del vector en una representación polar plana. La conexión de espín de Cartan se define por el hecho de que los ejes del sistema plano polar rotan con respecto a los ejes fijos del sistema cartesiano. Una vez definidos los componentes de la tétrada y de la conexión de espín, se utilizan las ecuaciones estructurales primera y segunda de Cartan para el cálculo de la torsión y curvatura de Cartan de las coordenadas polares planas en dos dimensiones. El resultado más importante obtenido es que la torsión es distinta de cero. Si la torsión de Cartan no es igual a cero en el nivel más sencillo posible, entonces es distinta de cero en cualquier geometría. Esto suena a desastre para la física establecida, porque la RGE se basa en una torsión igual a cero.

Esta técnica se utiliza en la Sección 3 para demostrar que la velocidad angular es una conexión de espín de Cartan. En consecuencia, ésta última resulta fundamental para todos los conceptos familiares en el campo de la dinámica rotacional. Como de costumbre, las notas de acompañamiento de este documento, incluidas en el portal www.aias.us incluyen una riqueza de detalles referidos a los cálculos, y debieran de leerse en forma paralela a este documento, UFT235.

2. Cálculo de la torsión de Cartan.

Consideremos a los bien conocidos [12 -14] vectores unitarios de las coordenadas polares en un plano:

$$\underline{e}_r = \cos\theta\,\underline{i} + \operatorname{sen}\theta\,\underline{j} \qquad (1)$$

$$\underline{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j} \tag{2}$$

Los vectores unitarios dependen del tiempo [12] y rotan. Los vectores unitarios $\underline{i}$ y $\underline{j}$ del sistema cartesiano no dependen del tiempo y están fijos o estáticos. Los cuatro elementos de la tétrada de Cartan $q^a{}_\mu$ vienen definidos por:

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_r \\ \underline{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^{(1)}_1 & q^{(1)}_2 \\ q^{(2)}_1 & q^{(2)}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Este es un ejemplo de la definición general [11]:

$$V^a = q^a_\mu V^\mu \tag{4}$$

Los cuatro componentes de la tétrada son:

$$q^{(1)}_1 = \cos\theta \;, \quad q^{(1)}_2 = \operatorname{sen}\theta$$
$$q^{(2)}_1 = -\operatorname{sen}\theta \;, \quad q^{(2)}_2 = \cos\theta \tag{5}$$

y la matriz de la tétrada es:

$$q^a_\mu = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{6}$$

Nótese cuidadosamente que esto también es la matriz de rotación alrededor del eje Z:

$$\begin{bmatrix} V'_X \\ V'_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \end{bmatrix} \tag{7}$$

para cualquier vector $\underline{V}$. Se deduce a partir de las Ecs. (4) y (7) que:

$$\begin{bmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

donde:

$$V^{(1)} = V'_X \;, \quad V^{(2)} = V'_Y \tag{9}$$

$$V^1 = V_X \quad , \quad V^2 = V_Y$$

Para demostrar este resultado, nótese que:

$$\underline{V} = V_X \underline{i} + V_Y \underline{j} = V^{(1)} \underline{e}_r + V^{(2)} \underline{e}_\theta$$
$$= V^{(1)}(\cos\theta\, \underline{i} + \operatorname{sen}\theta\, \underline{j}) + V^{(2)}(-\operatorname{sen}\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}) = V^1 \underline{i} + V^2 \underline{j} \tag{10}$$

de manera que:

$$V^1 = V^{(1)} \cos\theta - V^{(2)} \operatorname{sen}\theta \tag{11}$$

$$V^2 = V^{(1)} \operatorname{sen}\theta + V^{(2)} \cos\theta \tag{12}$$

Multiplicamos ahora la Ec. (11) por $\cos\theta$ y la Ec. (12) por $-\operatorname{sen}\theta$. Resulta entonces que:

$$V^{(1)} = V^1 \cos\theta + V^2 \operatorname{sen}\theta \, , \tag{13}$$

$$V^{(2)} = -V^1 \operatorname{sen}\theta + V^2 \cos\theta \, , \tag{14}$$

que es la Ec. (8), QED.

Se ha demostrado que una rotación en el plano *XY* alrededor del eje *Z* define la matriz de la tétrada de Cartan y cuatro elementos de la tétrada de Cartan.

Definimos la métrica en el sistema cartesiano mediante $g_{\mu\nu}$ y la métrica en el sistema polar plano mediante η_{ab}. Por definición [1] las dos métricas se relacionan mediante:

$$g_{\mu\nu} = q^a_\mu \, q^b_\nu \, \eta_{ab} \tag{15}$$

Las métricas se relacionan con el elemento lineal infinitesimal mediante:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu \, , \tag{16}$$

$$ds^2 = \eta_{ab} \, dx^a dx^b \, , \tag{17}$$

de manera que [12 -14]:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \, , \tag{18}$$

$$ds^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 . \tag{19}$$

En coordenadas cartesianas:

$$dx^1 = dX, \quad dx^2 = dY, \quad g_{11} = g_{22} = 1, \tag{20}$$

y en coordenadas polares planas:

$$dx^1 = dr, \quad dx^2 = r\,d\theta, \quad g_{11} = g_{22} = 1. \tag{21}$$

La Ec. (15) significa:

$$g_{11} = q_1^{(1)} q_1^{(1)} \eta_{(1)(1)} + q_1^{(2)} q_1^{(2)} \eta_{(2)(2)}, \tag{22}$$

$$g_{22} = q_2^{(1)} q_2^{(1)} \eta_{(1)(1)} + q_2^{(2)} q_2^{(2)} \eta_{(2)(2)}. \tag{23}$$

A partir de las Ecs. (5), (20) y (21), las Ecs. (22) y (23) son correctos y autosuficientes. Las Ecs. (22) y (23) ambas dan:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \tag{24}$$

A partir de la teoría del generador de rotación [14], si:

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{25}$$

entonces el operador conocido como el generador de rotación se define como:

$$J_Z = \frac{1}{i} \left. \frac{dR_Z}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

En tres dimensiones:

$$J_Z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

y:

$$[J_x, J_y] = i J_z \quad \text{et ciclicum} \tag{28}$$

Se deduce entonces que [14]:

$$R_z(\theta) = \exp(i J_z \theta) \tag{29}$$

Para demostrar lo anterior consideremos la serie de MacLaurin:

$$\exp(i J_z \theta) = 1 + i J_z \theta - \frac{1}{2!} J_z^2 \theta^2 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

En consecuencia, la matriz de la tétrada es:

$$q^a_\mu = \exp(i J_z \theta) \tag{31}$$

donde ambos lados son matrices en esta notación.

La estructura general de la Ec. (26) es aquella de la derivada de una tétrada, porque la matriz de rotación es una matriz tétrada. El postulado de la tétrada de la geometría de Cartan afirma [11] que la derivada covariante de la tétrada es igual a cero:

$$D_\nu q^a_\mu = \partial_\nu q^a_\mu + \omega^a_{\nu b} q^b_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} q^a_\lambda = 0 . \tag{32}$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$\partial_\nu q^a_\mu = \zeta^a_{\nu\mu} := \Gamma^a_{\nu\mu} - \omega^a_{\nu\mu} \tag{33}$$

y es una generalización de la Ec. (26). En consecuencia, el generador de rotación constituye un caso especial de la conexión zeta definida por:

$$\zeta^a_{\nu\mu} := \Gamma^a_{\nu\mu} - \omega^a_{\nu\mu} . \tag{34}$$

La torsión de Cartan asociada con este proceso se define como [1 – 11]:

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu q^a_\nu - \partial_\nu q^a_\mu + \omega^a_{\mu b} q^b_\nu - \omega^a_{\nu b} q^b_\mu = \Gamma^a_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\nu\mu} . \quad (35)$$

Cualquier órbita en un plano se genera mediante una conexión y una torsión de la geometría.

Esto constituye una nueva comprensión de todas las órbitas en un plano y se origina en el hecho de que, para cualquier órbita de este tipo:

$$\frac{dr}{d\theta} \neq 0 . \quad (36)$$

Resulta entonces que:

$$\frac{d\cos\theta}{dr} = -\frac{d\theta}{dr}\operatorname{sen}\theta , \quad (37)$$

$$\frac{d\operatorname{sen}\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dr}\cos\theta , \quad (38)$$

de manera que, a partir de la Ec. (6):

$$\frac{dq^a_\mu}{dr} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dr} . \quad (39)$$

A partir de la Ec. (33) la matriz de conexión zeta de cualquier órbita plana es:

$$\zeta^a_{1\mu} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dr} . \quad (40)$$

Cualquier órbita plana es proporcional a la conexión zeta, que es un generador de rotación proporcional al momento angular y relacionado con la torsión del espacio-tiempo. Por ejemplo, para la órbita elíptica [1 – 11]:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon r^2}{\alpha}\operatorname{sen}\theta \quad (41)$$

y los elementos de la conexión son:

$$\zeta^{(1)}_{11} = \zeta^{(2)}_{12} = -\frac{\alpha}{\epsilon r^2} , \quad (42)$$

$$\xi^{(1)}_{12} = -\xi^{(2)}_{11} = -\frac{\alpha}{\epsilon r^2}\cot\theta$$

Los vectores unitarios del sistema polar plano rotan, y la conexión de espín de Cartan define la rotación. Denotemos los vectores base mediante:

$$e_r = e^{(1)}, \quad e_\theta = e^{(2)} \tag{43}$$

Por definición [11] la derivada covariante se define mediante

$$D_\mu e^{(a)} = \partial_\mu e^{(a)} + \omega^{(a)}_{\mu(b)} e^{(b)}. \tag{44}$$

Sin embargo, la cuatro-derivada ordinaria desaparece porque se define con un marco estático de referencia. La conexión de espín se define para describir el marco en rotación. Por ejemplo:

$$\frac{De^{(a)}}{dt} = \frac{de^{(a)}}{dt} + \omega^{(a)}_{0(b)} e^{(b)} \tag{45}$$

y

$$\frac{de^{(a)}}{dt} = 0 \tag{46}$$

Por lo tanto:

$$\frac{De^{(a)}}{dt} = \omega^{(a)}_{0(b)} e^{(b)} \tag{47}$$

En notación vectorial:

$$\frac{D\underline{e}_r}{dt} = \omega^{(1)}_{0(2)} \underline{e}_\theta . \tag{48}$$

Este resultado siempre se denota [12 – 14] mediante

$$\frac{d\underline{e}_r}{dt} = \omega\, \underline{e}_\theta = \frac{d\theta}{dt} \underline{e}_\theta \tag{49}$$

pero rigurosamente debiera ser:

$$\frac{D\underline{e}_r(t)}{dt} = \left(\frac{d\underline{e}_r}{dt}\right)_{estat} + \omega\, \underline{e}_\theta(t) \, . \tag{50}$$

Resulta entonces que

$$\omega^{(1)}_{0(2)} = \omega \tag{51}$$

un resultado que posee una importancia fundamental.

Con las definiciones [12- 14]

$$\underline{\omega} = \omega\, \underline{k} \, , \tag{52}$$

$$\underline{k} = \underline{e}_r \times \underline{e}_\theta \, , \tag{53}$$

$$\underline{e}_\theta = \underline{k} \times \underline{e}_r \, , \tag{54}$$

la Ec. (50) puede expresarse como:

$$\frac{D\underline{e}_r(t)}{dt} = \left(\frac{d\underline{e}_r}{dt}\right)_{estat} + \underline{\omega} \times \underline{e}_r \, , \tag{55}$$

un resultado que posee una importancia fundamental para la dinámica rotacional (Sección 3). Análogamente, el resultado cinemático básico [12]:

$$\frac{d\,\underline{e}_\theta}{dt} = -\,\omega\, \underline{e}_r \tag{56}$$

puede expresarse como:

$$\frac{D e^{(2)}}{dt} = \omega^{(2)}_{0(1)}\, e^{(1)} \, . \tag{57}$$

De manera que los dos elementos de conexión de espín de este tipo son:

$$\omega^{(1)}_{0(2)} = -\,\omega^{(2)}_{0(1)} = \omega \, . \tag{58}$$

Toda la información necesaria para calcular los elementos de la torsión de Cartan está ahora disponibles. Por ejemplo:

$$T^{(1)}_{01} = \partial_0 q^{(1)}_1 - \partial_1 q^{(1)}_0 + \omega^{(1)}_{0(b)} q^{(b)}_1 - \omega^{(1)}_{1(b)} q^{(b)}_0 \tag{59}$$

Con una suma sobre índices repetidos (b). Por definición:

$$q^{(0)}_0 = 1, \quad q^{(1)}_0 = q^{(2)}_0 = 0, \tag{60}$$

de manera que el resultado se reduce a:

$$T^{(1)}_{01} = \partial_0 q^{(1)}_1 + \omega^{(1)}_{0(2)} q^{(2)}_1 . \tag{61}$$

Utilizando los elementos relevantes de la tétrada y de la conexión de espín se obtiene el resultado:

$$T^{(1)}_{01} = -2\omega \operatorname{sen}\theta = -2\frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\theta \tag{62}$$

Procediendo en forma similar se obtiene la matriz de torsión:

$$T^{a}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T^{(1)}_{01} & T^{(1)}_{02} \\ T^{(2)}_{01} & T^{(2)}_{02} \end{bmatrix} = 2\omega \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \tag{63}$$

que puede expresarse como:

$$T^{a}_{\mu\nu} = 2\frac{d}{d\theta} q^{a}_{\mu} = 2\omega \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{64}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{i} \begin{bmatrix} T^{(1)}_{01} & T^{(1)}_{02} \\ T^{(2)}_{01} & T^{(2)}_{02} \end{bmatrix}_{\theta=0} = 2\omega \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = 2\omega J_Z \tag{65}$$

donde el generador de rotación infinitesimal alrededor del eje Z se define [14] como:

$$J_Z = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{66}$$

El resultado final es que la matriz de torsión es proporcional al generador de rotación infinitesimal:

$$\begin{bmatrix} T^{(1)}_{01} & T^{(1)}_{02} \\ T^{(2)}_{01} & T^{(2)}_{02} \end{bmatrix}_{\theta=0} = 2i\omega J_Z . \tag{67}$$

A partir del postulado de la tétrada (32):

$$\Gamma^{(a)}_{\mu\nu} = \partial_\mu q^{(a)}_{\nu} + \omega^{(a)}_{\mu(b)} q^{(b)}_{\nu} \tag{68}$$

de manera que existen conexiones con índice mixto, tales como:

$$\Gamma^{(1)}_{01} = \partial_0 q^{(1)}_{1} + \omega^{(1)}_{0(2)} q^{(2)}_{1} = -2\omega\,\mathrm{sen}\,\theta . \tag{69}$$

A partir de la Ec. (59):

$$\Gamma^{(1)}_{01} = -2\omega\,\mathrm{sen}\,\theta , \quad \Gamma^{(1)}_{10} = 0 , \tag{70}$$

De manera que estas conexiones con índice mixto no son ni simétricas ni antisimétricas para las coordenadas polares planas, para las cuales la torsión de Cartan es en general distinta de cero. Este resultado por sí solo resulta suficiente para refutar cualquier teoría de la relatividad basada en una torsión igual a cero, específicamente la RGE. La conexión de índice mixto de tipo (68) siempre puede definirse como la suma de componentes simétricos (S) y antisimétricos (A) a partir de un teorema básico de matrices [15]. El elemento de torsión de Cartan (61) se define [1 – 11] como:

$$T^{(1)}_{01} = \Gamma^{(1)}_{01}(A) - \Gamma^{(1)}_{10}(A) \tag{71}$$

y es siempre igual al doble de la conexión antisimétrica $\Gamma^{(1)}_{01}$ (A). De manera que:

$$T^{(1)}_{01} = 2\,\Gamma^{(1)}_{01}(A) . \tag{72}$$

En forma más general [11] cualquier diferencia entre conexiones, tales como:

$$T^{a}_{\mu\nu} = \Gamma^{a}_{\mu\nu} - \Lambda^{a}_{\nu\mu} \tag{73}$$

es un tensor de torsión. Claramente, la torsión de Cartan (71) constituye un caso especial de la definición general en la Ec. (73) [11].

Estos elementos de la torsión pueden recibir el apelativo de "torsión orbital" [1 – 10] por analogía con el momento angular orbital. También existen elementos de "torsión de espín" tales como:

$$T^{(1)}_{12} = \partial_1 q^{(1)}_{2} - \partial_2 q^{(1)}_{1} + \omega^{(1)}_{1(b)} q^{(b)}_{2} - \omega^{(1)}_{2(b)} q^{(b)}_{1} . \tag{74}$$

La evaluación de la torsión de espín para las coordenadas polares planas requiere de la evaluación de diferentes conexiones de espín respecto de aquellos utilizadas en la torsión orbital. A partir de las definiciones básicas de los vectores unitarios de las coordenadas polares planas:

$$\underline{e}_r = \underline{i} \cos\theta + \underline{j} \operatorname{sen}\theta , \tag{75}$$

$$\underline{e}_\theta = -\underline{i} \operatorname{sen}\theta + \underline{j} \cos\theta , \tag{76}$$

se observa que:

$$\frac{d\underline{e}_r}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \underline{e}_\theta , \quad \frac{d\underline{e}_r}{d\theta} = \underline{e}_\theta . \tag{77}$$

El elemento lineal infinitesimal se define mediante:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 , \end{aligned} \tag{78}$$

de manera que

$$x^1 = r , \quad x^2 = r\theta , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial r} , \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial (r\theta)} \tag{79}$$

Definiendo:

$$y = r\theta \tag{80}$$

entonces:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\theta}\frac{d\theta}{dr} \quad , \quad \frac{d\underline{e}_r}{d(r\theta)} = \frac{d\theta}{dr}\,\underline{e}_\theta \tag{81}$$

La Ec. (77) puede expresarse como:

$$\frac{de^{(1)}}{dx^1} = \omega^{(1)}_{1(2)}\,e^{(2)} \quad , \text{ es decir } \quad \frac{d\underline{e}_r}{dr} = \frac{d\theta}{dr}\,\underline{e}_\theta \tag{82}$$

de manera que:

$$\omega^{(1)}_{1(2)} = \frac{d\theta}{dr} . \tag{83}$$

La Ec. (81) puede expresarse como:

$$\frac{de^{(1)}}{dx^2} = \omega^{(1)}_{1(2)}\,e^{(2)} \tag{84}$$

de manera que

$$\omega^{(1)}_{2(2)} = \frac{d\theta}{dr} . \tag{85}$$

Por lo tanto, los componentes relevantes de la conexión de espín son

$$\omega^{(1)}_{1(2)} = \omega^{(1)} = \frac{d\theta}{dr} . \tag{86}$$

Se deduce entonces que:

$$T^{(1)}_{12} = \frac{d\,\mathrm{sen}\,\theta}{dr} - \frac{d\cos\theta}{d(r\theta)} + \omega^{(1)}_{1(1)}q^{(1)}_2 + \omega^{(1)}_{1(2)}q^{(2)}_2 - \omega^{(1)}_{2(1)}q^{(1)}_1 - \omega^{(1)}_{2(2)}q^{(2)}_1 \tag{87}$$

en donde:

$$\omega^{(1)}_{1(1)} = \omega^{(1)}_{2(1)} = 0 . \tag{88}$$

De manera que:

$$T^{(1)}_{12} = 2\frac{d\theta}{dr}\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) \tag{89}$$

Análogamente:

$$T^{(1)}_{21} = -2\frac{d\theta}{dr}\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right) \tag{90}$$

de manera que el elemento de torsión de espín es antisimétrico:

$$T^{(1)}_{12} = -T^{(1)}_{21} \tag{91}$$

tal como debe de serlo por definición [1 – 11], QED.

Con el objeto de evaluar el elemento de torsión de espín:

$$T^{(2)}_{12} = -T^{(2)}_{21} \tag{92}$$

deben definirse nuevos elementos de conexión de espín. A partir de las Ecs. (75) y (76):

$$\frac{d\underline{e}_\theta}{dr} = -\frac{d\theta}{dr}\underline{e}_r \tag{93}$$

y:

$$\frac{d\underline{e}_\theta}{d(\theta r)} = -\underline{e}_r\left(\frac{d\theta}{dr}\right) \tag{94}$$

La Ec. (93) es:

$$\frac{de^{(2)}}{dx^1} = \omega^{(2)}_{1(1)}\, e^{(1)} \tag{95}$$

y la Ec. (94) es:

$$\frac{de^{(2)}}{dx^2} = \omega^{(2)}_{2(1)}\, e^{(1)} \tag{96}$$

de manera que los elementos requeridos de la conexión de espín son:

$$\omega^{(2)}_{1(1)} = \omega^{(2)}_{2(1)} = -\frac{d\theta}{dr} \tag{97}$$

Por lo tanto:

$$T^{(2)}_{12} = -T^{(2)}_{21} = 2\frac{d\theta}{dr}\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right) \tag{98}$$

Las conexiones de índice mixto relevantes son:

$$\Gamma^{(1)}_{12} = 2\frac{d\theta}{dr}\cos\theta = \Gamma^{(2)}_{12}, \tag{99}$$

$$\Gamma^{1}_{21} = -2\frac{d\theta}{dr}\operatorname{sen}\theta = -\Gamma^{(2)}_{21} \tag{100}$$

dando origen a la matriz:

$$\begin{bmatrix} \Gamma^{(1)}_{12} & \Gamma^{(1)}_{21} \\ \Gamma^{(2)}_{12} & \Gamma^{(2)}_{21} \end{bmatrix} = 2\frac{d\theta}{dr}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}. \tag{101}$$

Por lo tanto, los elementos de torsión de espín de las coordenadas polares planas son distintos de cero, un resultado de importancia básica que, una vez más, refuta la RGE.

En general, las conexiones de índice mixto del tipo (101) no son ni simétricas ni antisimétricas. Utilizando la definición (71) las conexiones antisimétricas relevantes son:

$$\Gamma^{(1)}_{12}(A) = 2\frac{d\theta}{dr}\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right), \tag{102}$$

$$\Gamma^{(2)}_{12}(A) = 2\frac{d\theta}{dr}\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right). \tag{103}$$

En formato vectorial, utilizando

$$T^{(1)}_{3} = \epsilon_{123} T^{(1)}_{12} \tag{104}$$

la torsión de espín es directamente proporcional a la velocidad angular vectorial:

$$\underline{T}^{(1)} = 2\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right)\frac{d\theta}{dr}\,\underline{k}\,. \tag{105}$$

En un contexto relativista, las unidades de la torsión son la inversa de metros, pero en este contexto no relativista la torsión orbital se define como teniendo unidades de la inversa de segundos.

3. La conexión de espín y la velocidad angular en dinámica rotacional,

El resultado (55) de la Sección 2 para vectores unitarios se cumple para cualquier vector $\underline{V}$, porque cualquier vector puede expresarse en términos de vectores unitarios. En consecuencia:

$$\frac{D\underline{V}}{dt} = \frac{d\underline{V}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{V} . \tag{106}$$

Este es el resultado conocido de la dinámica rotacional clásica [12]. En coordenadas polares planas [12] el vector posición r, por ejemplo, es:

$$\underline{r} = r\,\underline{e}_r \tag{107}$$

de manera que:

$$\underline{V} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\underline{e}_r + r\frac{d\underline{e}_r}{dt} = \underline{v}_s + \omega r\,\underline{e}_\theta \tag{108}$$

donde $\underline{v}$ es la velocidad total. Es la suma de la velocidad en un marco inercial (marco con coordenadas estáticas):

$$\underline{v}_s = \frac{dr}{dt}\underline{e}_r \tag{109}$$

y la velocidad lineal orbital [12]:

$$\underline{v}_o = \omega r\,\underline{e}_\theta = \underset{\sim}{\omega} \times \underline{r} \tag{110}$$

En formato de componentes:

$$\underline{v} = \frac{dr}{dt}\underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\,\dot{\underline{e}}_r \tag{111}$$

Llegamos así al importante resultado de que la velocidad lineal orbital es el resultado de la conexión de espín de Cartan en coordenadas polares planas.

A partir de la Ec. (111) se define la aceleración mediante:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\underline{e}_r + r\frac{d\underline{e}_r}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2 r}{dt^2}\underline{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\underline{e}_r}{dt} + r\frac{d^2\underline{e}_r}{dt^2}\right) \tag{112}$$

El término entre paréntesis es la aceleración debida a la rotación del marco de referencia mismo, de manera que se debe a la conexión de espín de Cartan. A partir de definiciones fundamentales [12]:

$$\frac{d\underline{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\underline{e}_\theta = \omega\,\underline{e}_\theta \tag{113}$$

de manera que:

$$\underline{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}\underline{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\omega\,\underline{e}_\theta + r\frac{d}{dt}\left(\omega\,\underline{e}_\theta\right)\right). \tag{114}$$

En esta ecuación:

$$\omega\,\underline{e}_\theta = \underline{\omega} \times \underline{e}_r, \quad \frac{d}{dt}\left(\omega\,\underline{e}_\theta\right) = \frac{d\omega}{dt}\underline{e}_\theta + \omega\frac{d\underline{e}_\theta}{dt} \tag{115}$$

y la velocidad inercial o newtoniana es:

$$\underline{v}_N = \frac{dr}{dt}\underline{e}_r . \tag{116}$$

Por lo tanto:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}_N}{dt} + 2\,\underline{\omega} \times \underline{v}_N + \omega r\frac{d\underline{e}_\theta}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\underline{e}_\theta . \tag{117}$$

Utilizando:

$$\frac{d\underline{e}_\theta}{dt} = -\omega\,\underline{e}_r \tag{118}$$

la aceleración es:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}_N}{dt} + 2\,\underline{\omega} \times \underline{v}_N + \frac{d\omega}{dt}\underline{e}_\theta - \omega^2 r\,\underline{e}_r \tag{119}$$

en donde

$$\underline{\omega} \times \underline{v} = \omega \underline{k} \times r \underline{e}_r = \omega r \underline{e}_\theta \tag{120}$$

y:

$$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \omega^2 r \, \underline{k} \times \underline{e}_\theta = -\omega^2 r \, \underline{e}_r \tag{121}$$

Por lo tanto, la aceleración completa es:

$$\underline{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r + 2 \underline{\omega} \times \underline{v}_N + \frac{d \underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \tag{122}$$

y en formato de componentes es:

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \underline{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \underline{e}_\theta \tag{123}$$

La aceleración de Coriolis es:

$$\underline{a}_{Cor} = 2 \underline{\omega} \times \underline{v}_N + \frac{d \underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} = (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \underline{e}_\theta , \tag{124}$$

y la aceleración centrífuga es:

$$\underline{a}_{cent} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = - r \dot{\theta}^2 \underline{e}_r . \tag{125}$$

La aceleración inercial o newtoniana es:

$$\underline{a}_{Newton} = \frac{d^2 r}{dt^2} \underline{e}_r . \tag{126}$$

Se llega así al importante resultado de que todas estas bien conocidas aseveraciones se deben a la conexión de espín de Cartan, la cual en formato vectorial es la velocidad angular $\underline{\omega}$.

En trabajos previos [1 – 10] se halló que la aceleración de Coriolis desaparece para todas las órbitas planas:

$$\underline{a}_{Cor} = 2 \underline{\omega} \times \underline{v}_N + \frac{d \omega}{dt} \times \underline{r} = \underline{0} \tag{127}$$

de manera que la aceleración total para todas las órbitas planas es:

$$\underline{a}(\text{órbita}) = \frac{d^2r}{dt^2}\underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}), \tag{128}$$

y es la suma de las aceleraciones inercial y centrífuga. A partir de trabajos previos se encontró que la aceleración inercial de la órbita elíptica es:

$$\underline{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\underline{e}_r = \left(\frac{L}{mr}\right)^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{129}$$

donde L es el momento angular total conservado:

$$L = mr^2\omega. \tag{130}$$

La órbita elíptica se define mediante:

$$r = \frac{\alpha}{1+\epsilon\cos\theta} \tag{131}$$

donde α es la semi latitud recta y ε es la excentricidad. Para la órbita circular:

$$r = \alpha \tag{132}$$

de manera que la aceleración inercial de la órbita circular desaparece:

$$\underline{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\underline{e}_r = \underline{0} \tag{133}$$

La fuerza inercial se define como:

$$\underline{F}_N = m\frac{d^2r}{dt^2}\underline{e}_r \tag{134}$$

y éste es un resultado general, válido para todas las órbitas planas

En el caso particular de la dinámica newtoniana [12]:

$$\underline{F}_N = \left(\frac{L^2}{mr^3} - \frac{L^2}{mr^2\alpha}\right)\underline{e}_r\ , \quad \alpha = \frac{L^2}{m^2MG} \tag{135}$$

de manera que la fuerza inercial es:

(136)

n de la

(137)

rn

(138)

si

er

ectivo.

(139)

es

de

(140)

nino:

(141)

ica de

ió ración

(142)

spacio

ebe al

efe

Referencias.

[1] M. W. Evans, "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (CISP, 2012, www.cisp-publishing.com), número especial seis de la referencia dos.

[2] M .W. Evans, Ed., "Journal of Foundations of Physics and Chemistry" (CISP 2011 en adelante, seis publicaciones al año).

[3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP 2011).

[4] M .W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic 2005 a 2011) en siete volúmenes.

[5] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007). Hay traducción de este libro al castellano por Alex Hill en la Sección en Español del portal www.aias.us .

[6] K. Pendergast, "The Life of Myron Evans" (Abramis 2011).

[7] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).

[8] M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley 1992, 1993, 1997 y 2001) en seis volúmenes y dos ediciones.

[9] M .W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, Dordrecht, 1994 a 2002) en diez volúmenes con encuadernación dura o blanda.

[10] M .W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific 1994).

[11] S. M. Carroll, "Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004).

[12] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics of Particles and Systems"(Harcourt, New York, 1988, tercera edición).

[13] W. G. Milewski (Editor de Jefe), "The Vector Analysis Problem Solver" (Research and Education Association, Nueva York, 1987).

[14] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory" (Cambridge University Press, 1996, segunda edición).

[15] G. Stephenson, "Mathematical Methods for Science Students" Longmans, Londres, 1968)