Efecto de la Gravitación sobre la Resonancia del Fermión y Correcciones Relativistas de Orden Superior.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,

Civil List y AIAS

www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.upitec.org, www.et3m.net, www.atomicprecision.com

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se utiliza una prescripción mínima ampliada para evaluar el efecto de la gravitación sobre la resonancia del fermión. Los resultados muestran que tales efectos son pronunciados en sistemas tales como estrellas de neutrones con una pesada masa y un pequeño radio, pero despreciables a nivel del laboratorio. Se brinda cierta consideración al desarrollo general de las tétradas y la evaluación del momento angular a partir de la geometría de Cartan. Se evalúan efectos relativistas de orden superior a partir de la ecuación del fermión, utilizando la representación del operador y la representación de la fusión del operador mixto del momento lineal. Se descubre que las correcciones relativistas de orden superior tienen un efecto pronunciado sobre la teoría. Algunos resultados se evalúan mediante álgebra computacional para las funciones de onda hidrogénicas.

Palabras clave: teoría ECE, momento angular, ecuación del fermión, efectos gravitacionales sobre la resonancia del fermión, conexiones relativistas de orden superior.

1. INTRODUCCIÓN.

En recientes documentos de esta serie [1 – 10] se ha desarrollado la ecuación del fermión de la teoría ECE en diferentes maneras, a fin de revelar nuevos tipos de espectroscopía. En la Sección 2 se continúa el desarrollo, examinando en primer término la forma en la cual la geometría de Cartan conduce a una definición fundamentalmente nueva del momento angular. Se muestra que la tétrada es ubicua a lo largo de la dinámica y la electrodinámica, y puede definirse de muchas maneras diferentes. Generadores de rotación, conexiones y elementos de torsión se evalúan en la base polar cilíndrica para ilustrar la metodología en la forma más sencilla posible. La teoría del operador de momento angular resulta fundamental para toda la mecánica cuántica [11], como es bien sabido. Se ofrece una sinopsis de la teoría de acoplamiento orbital de espín, que conduce a nuevos resultados que se evalúan mediante álgebra computacional en la Sección 3. La prescripción mínima mixta se introduce para el efecto combinado del electromagnetismo y la gravitación. El efecto mutuo del electromagnetismo sobre la gravitación viene dado por un término mixto que se utiliza para evaluar el efecto de la gravitación sobre el espectro de resonancia del fermión. Los espectros se evalúan mediante álgebra computacional en la Sección 3. Se encuentra que el efecto de la gravitación resulta despreciable en el laboratorio pero se vuelve claramente observable en la atmósfera de una estrella de neutrones, con su gran masa y pequeño radio. De manera que estos efectos pueden evaluarse experimentalmente. El efecto de correcciones relativistas de orden superior en la ecuación del fermión se evalúa sistemáticamente en la representación del operador de momento lineal, así como en la descripción de la función y operador mixtos. Es bien sabido que en la ecuación original de Dirac se obtienen algunos resultados [12] con la representación de un operador (factor $\boldsymbol{g}$, factor de Lande, REE (resonacia de espín electrónica), RMN, IRM) y otros con una descripción de operador/función (factor de Thomas, constante de acoplamiento orbital de espín, efecto Darwin). No existe una regla que pueda utilizarse para decidir dónde debe utilizarse una dada descripción, y en documentos previos se han desarrollado varias nuevas espectroscopías con diferentes descripciones y un empleo novedoso del álgebra de Pauli. Esto ha avanzado mucho más que en todo el pasado en la exploración de la mecánica cuántica fundamental, y ha demostrado que la ecuación de Dirac posee en ella alguna arbitrariedad desconocida hasta ahora. La ecuación del fermión es equivalente a la descripción quiral de la ecuación de Dirac. Por ejemplo, algunas selecciones de representación pueden conducir a resultados sin sentido físico, tal como se describió en el documento anterior. Sin embargo, casi todas parecen producir resultados con sentido físico, los cuales pueden evaluarse experimentalmente. Si estas pruebas demuestran la teoría, entonces la mecánica cuántica saldrá fortalecida. En caso contrario, surgiría una debilidad fundamental, la cual habrá que rectificar en futuro trabajo teórico. En la Sección 3, se evaluaron algunos de los resultados clave de estos documentos, mediante álgebra computacional, para las funciones de onda hidrogénicas.

2. Desarrollo teórico.

Uno de los principales avances realizados a través de la teoría ECE es el de mostrar que una tétrada puede definirse a través de dos descripciones diferentes del mismo espacio matemático, por ejemplo polar cilíndrico y cartesiano. Para cada cantidad, en dinámica y electrodinámica clásicas, siempre puede definirse una tétrada. Por ejemplo:

$$e^{a} = q^{a}_{\mu}\, e^{\mu} \quad (1.a)$$

$$r^{a} = q^{a}_{\mu}\, r^{\mu} \quad (1.b)$$

$$p^{a} = q^{a}_{\mu}\, p^{\mu} \quad (1.c)$$

$$a^{a} = q^{a}_{\mu}\, a^{\mu} \quad (1d)$$

$$A^{a} = q^{a}_{\mu}\, A^{\mu} \quad (1.e)$$

donde a y μ denotan bases diferentes. Aquí, e^a es el vector unitario, r es el vector de posición, p^a es el vector de momento lineal, a^a es el vector de aceleración lineal, A^a es el potencial electromagnético, y demás. La Ec. (1.a) puede interpretarse como:

$$\begin{bmatrix} e^{(1)} \\ e^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^{(1)}_{1} & q^{(1)}_{2} \\ q^{(2)}_{1} & q^{(2)}_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1} \\ e^{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde, por simplicidad, se ha limitado la atención a dos dimensiones. Si una base es la polar cilíndrica y la otra es la cartesiana, la Ec. (3) es:

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_{r} \\ \underline{e}_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^{(1)}_{1} & q^{(1)}_{2} \\ q^{(2)}_{1} & q^{(2)}_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde los vectores unitarios se definen mediante:

$$\underline{e}_{r} = \underline{i} \cos\theta + \underline{j}\, \mathrm{sen}\,\theta \quad (4)$$

$$\underline{e}_{\theta} = -\underline{i}\, \mathrm{sen}\,\theta + \underline{j} \cos\theta\,. \quad (5)$$

De manera que, en este caso, la tétrada es la matriz de 2 × 2:

$$q^{a}_{\mu} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

que es la matriz de rotación alrededor del eje Z [12]. Es bien conocido que el generador de rotación infinitesimal [12] se define mediante:

$$J_z = \frac{1}{i}\frac{d}{d\theta} q^a_\mu \bigg|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

y dentro del margen de un factor *ħ*, el generador de rotación infinitesimal posee las mismas propiedades de conmutador que el operador de momento angular de la mecánica cuántica.

Nótese ahora que:

$$dq^a_\mu / dX = \frac{d\theta}{dX}\, dq^a_\mu / d\theta = \frac{d\theta}{dX} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$dq^a_\mu / dY = \frac{d\theta}{dY}\, dq^a_\mu / d\theta = \frac{d\theta}{dY} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

y denotando:

$$X = 1, \quad Y = 2 \tag{10}$$

resulta, al igual que en la nota de acompañamiento 253(1) que se publica junto a este documento en el portal www.aias.us , que:

$$\partial_1 q^{(2)}_2 = \frac{1}{r}, \quad \partial_2 q^{(1)}_1 = -\frac{1}{r}\tan\theta, \tag{11}$$

$$\partial_1 q^{(1)}_2 = -\frac{1}{r}\operatorname{cotan}\theta, \quad \partial_2 q^{(2)}_1 = -\frac{1}{r}. \tag{12}$$

A partir de consideraciones de antisimetría de la torsión de Cartan, en la nota de acompañamiento 253(1), se deduce que las conexiones de espín de Cartan [1 – 10] son:

$$\omega^{(1)}_{12} + \omega^{(1)}_{21} = \frac{1}{r}\left(\tan\theta + \operatorname{cotan}\theta\right) \tag{13}$$

y:

$$\omega^{(2)}_{12} = -\omega^{(2)}_{21} \tag{14}$$

Se relacionan con la conexión antisimétrica de Christoffel mediante:

$$\Gamma^a_{\mu\nu} = -\Gamma^a_{\nu\mu} = \partial_\mu q^a_\nu + \omega^a_{\mu\nu} . \tag{15}$$

Esta geometría de Cartan fundamental puede relacionarse con la teoría del momento angular de la siguiente manera.

Diferenciando la Ec. (6) con respecto a θ da:

$$\frac{\partial q^a_\mu}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta} \partial_\mu q^a_\nu . \tag{16}$$

Definimos la matriz del generador de rotación general mediante:

$$J^a_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta} \partial_\mu q^a_\nu . \tag{17}$$

Para una rotación alrededor del eje Z, en coordenadas polares cilíndricas

$$J^a_\mu = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \tag{18}$$

de manera que el generador de rotación infinitesimal es:

$$J^a_\mu := \frac{1}{i} J^a_\mu (\theta = 0) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

La matriz del generador de rotación en representación cartesiana es:

$$J^{\nu}_{\mu} = q^{\nu}_{a} J^{a}_{\mu} \tag{20}$$

donde la tétrada inversa se define mediante:

$$q^{\nu}_{a} q^{a}_{\nu} = 1. \tag{21}$$

De manera que:

$$q^{\nu}_{a} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{22}$$

Por lo tanto:

$$J^{\nu}_{\mu} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

A partir de las Ecs. (19) y (23):

$$i\, J^{\nu}_{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \theta} \partial_{\mu} q^{a}_{\nu} \right)_{\theta=0} \tag{24}$$

Ahora bajamos los índices utilizando la métrica $g_{\nu\rho}$ y denotamos:

$$J_{Z} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} J^{\rho}_{\nu} \tag{25}$$

Resulta claro que J_Z es el formato vectorial del tensor J_{XY}. El operador de momento angular es:

$$\hat{J}_{Z} = \hbar\, J_{Z} \tag{26}$$

En general:

$$J_\rho = \epsilon^{\mu}_{\rho\nu} J^{\nu}_{\mu} , \tag{27}$$

$$\epsilon^{\mu}_{\rho\nu} = g^{\mu\lambda} \epsilon_{\rho\lambda\nu} , \tag{28}$$

de manera que el operador del momento angular puede definirse en cualquier espacio mediante:

$$\hat{J}_\rho = i\hbar \, \epsilon^{\mu}_{\rho\nu} J^{\nu}_{\mu} \tag{29}$$

En la ecuación del fermión, en lo que sigue, el espacio será el espacio-tiempo de Minkowski.

El momento angular se introduce en la ecuación del fermión a través del empleo del álgebra de Pauli [1 – 12]. La fuente de la ecuación del fermión es el momento lineal relativista de la relatividad restringida:

$$\underline{p} = \gamma m \underline{v} \tag{30}$$

donde

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{31}$$

es el factor de Lorentz y donde $\underline{v}$ es la velocidad lineal y *m* es la masa de una partícula. La Ec. (30) puede expresarse como la ecuación de energía de Einstein:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \tag{32}$$

la cual puede factorizarse como:

$$(E - mc^2)(E + mc^2) = c^2 p^2 . \tag{33}$$

El efecto de un campo externo se introduce mediante la prescripción mínima. Por ejemplo:

$$E \longrightarrow E - e\phi \tag{34}$$

donde $-e$ es la carga sobre el electrón y ϕ es el potencial escalar electromagnético. La prescripción mínima (34) puede ampliarse a:

$$E \longrightarrow E - e\phi + m\Phi \tag{35}$$

donde Φ es el potencial gravitacional. El cambio de signo se debe al hecho de que m es positiva pero $-e$ es negativa. Con la prescripción mínima (34) la Ec. (33) deviene:

$$E = e\phi + mc^2 + \frac{c^2 p^2}{E - e\phi + mc^2} \, . \tag{36}$$

Introducimos ahora la base SU(2) definida por las matrices de Pauli , de manera que:

$$E = e\phi + mc^2 + c^2 \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \left(\frac{1}{E - e\phi + mc^2} \right) \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \, . \tag{37}$$

Con el objeto de linealizar esta ecuación, la aproximación habitual [12] es el suponer que la E en el denominador del lado derecho de la igualdad es:

$$E = \gamma mc^2 \sim mc^2 \tag{38}$$

es decir

$$v \ll c \, . \tag{39}$$

Esta aproximación da:

$$E = e\phi + mc^2 + \frac{1}{2m} \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \, \underline{\sigma} \cdot \underline{p} + \frac{e}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \, \phi \, \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \tag{40}$$

La cantidad E definida en esta manera es energía total, de manera que esta ecuación se cuantiza a:

$$\hat{H}\psi = \left(e\phi + mc^2 + \frac{1}{2m} \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \, \underline{\sigma} \cdot \underline{p} + \frac{e}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \, \phi \, \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \right) \psi \tag{41}$$

donde $\hat{H}$ es el operador hamiltoniano. El momento lineal se cuantiza mediante la representación del operador [1 – 12]:

$$\hat{p} = -i\hbar \underline{\nabla} \tag{42}$$

al operador de momento lineal $\hat{p}$. Casi nunca se aclara en los libros de texto que el acoplamiento orbital de espín en los espectros se describe como sigue:

$$H_1 \psi = \frac{e}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \phi \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \psi = -\frac{ie\hbar}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} \phi \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \psi \tag{43}$$

El primer $\underline{p}$ se utiliza en la representación del operador, mientras que el segundo $\underline{p}$ se emplea en la representación funcional. No existe una razón a priori para esta elección. Se ha aceptado porque parecía brindar una descripción exacta de los espectros atómicos y moleculares. Sin embargo, los documentos inmediatamente precedentes a éste cuestionan la validez de este procedimiento. También es importante notar que el hamiltoniano (43) debe interpretarse como:

$$H_1 \psi = -\frac{ie\hbar}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} \left(\phi \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \psi \right) = \frac{-ie\hbar}{4m^2c^2} \left(\underline{\nabla} \left(\underline{\sigma} \cdot \underline{p} \right) \phi \psi + \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \underline{\nabla} \left(\phi \psi \right) \right) \tag{44}$$

donde se ha utilizado el Teorema de Leibnitz. La descripción convencional del acoplamiento orbital de espín proviene del término:

$$H_1 \psi = -\frac{ie\hbar}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} \left(\phi \psi \right) \underline{\sigma} \cdot \underline{p} + \ldots \tag{45}$$

en donde el Teorema de Leibnitz da:

$$\underline{\nabla} \left(\phi \psi \right) = \psi \underline{\nabla} \phi + \phi \underline{\nabla} \psi . \tag{46}$$

Por lo tanto, la Ec. (45) da:

$$H_1 \psi = -\frac{ie\hbar}{4m^2c^2} \left(\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} \phi \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \psi + \phi \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} \psi \underline{\sigma} \cdot \underline{p} \right) + \ldots \tag{47}$$

En este punto, la física establecida utiliza:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi \tag{48}$$

mientras que la física de la teoría ECE utiliza el mismo formato mediante el empleo de las leyes de antisimetría y como parte de una teoría del campo unificado [1 – 10]. El potencial de Coulomb utilizado para describir la interacción entre un electrón y un protón en el átomo de hidrógeno, es:

$$\phi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{49}$$

donde ε_0 es la permitividad en el vacío y r es la distancia entre el electrón y el protón. Por lo tanto, el campo eléctrico es:

$$\underline{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3} \tag{50}$$

y el hamiltoniano (47) deviene:

$$H_1\psi = \frac{-ie^2\hbar}{16\pi\epsilon_0 m^2c^2}\left(\frac{1}{r^3}\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\psi - \frac{1}{r}\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}\psi\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\right) \tag{51}$$

El momento angular orbital $\underline{L}$ se introduce mediante álgebra de Pauli de la siguiente manera:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} = \underline{r}\cdot\underline{p} + i\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\times\underline{p} = \underline{r}\cdot\underline{p} + i\underline{\sigma}\cdot\underline{L} \tag{52}$$

donde

$$\underline{L} = \underline{r}\times\underline{p}. \tag{53}$$

De manera que la parte real del primer término a la derecha de la igualdad en la Ec. (51) es:

$$\mathrm{Re}(H_1\psi) = \frac{e^2\hbar}{16\pi\epsilon_0 m^2c^2r^3}\underline{\sigma}\cdot\underline{L}\psi + \ldots \tag{54}$$

que es el término habitual de acoplamiento orbital de espín en el átomo de hidrógeno [1 – 11]. Nótese cuidadosamente que $\underline{\sigma} \,.\, \underline{L}$ en la Ec. (54) es todavía clásica. Es el valor esperado:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{L} = \int \psi^* \hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{L}} \, \psi \, d\tau \tag{55}$$

donde ^ denota operador. En mecánica cuántica [11], las matrices de Pauli se cuantizan de la siguiente manera y se vuelven operadores:

$$\hat{\underline{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\underline{\sigma}} \tag{56}$$

donde $\hat{\underline{S}}$ es el operador de momento angular de espín. De manera que:

$$\hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{L}} = \frac{2}{\hbar} \hat{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{L}} \tag{57}$$

En algunas representaciones [1-10]:

$$\hat{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{L}} \, \psi = \frac{\hbar^2}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \psi \tag{58}$$

de manera que:

$$\hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{L}} \, \psi = \hbar \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \psi \tag{59}$$

La expresión clásica $\underline{\sigma} \,.\, \underline{L}$ de la Ec. (54) es, por lo tanto

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \cdot \underline{L} = \langle \hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{L}} \rangle &= \hbar \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \int \psi^* \psi \, d\tau \\ &= \hbar \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right). \end{aligned} \tag{60}$$

A partir de las Ecs. (54) y (60):

$$\mathrm{Re}\left(\hat{H}_1\psi\right)=\frac{e^2\hbar^2}{16\pi\epsilon_0 m^2c^2}\left(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\right)\int\frac{\psi^*\psi}{r^3}\,d\tau \tag{61}$$

El segundo término a la derecha de la igualdad en la Ec. (51) es:

$$\hat{H}_2\psi=\frac{ie^2\hbar}{16\pi\epsilon_0 m^2c^2 r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}\psi\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} \tag{62}$$

Al igual que en documentos inmediatamente precedentes al presente, esto puede desarrollarse con la siguiente álgebra de Pauli [11], que se deduce a partir del álgebra de Pauli en la Ec. (52). La Ec. (63) es una identidad porque:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{p}=\frac{1}{r^2}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p},\quad \frac{1}{r^2}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{r}=1. \tag{63}$$

Utilizando:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}=\underline{r}\cdot\underline{p}+i\,\underline{\sigma}\cdot\underline{L} \tag{64}$$

la Ec. (63) puede expresarse como:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{p}=\frac{1}{r^2}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\left(\underline{r}\cdot\underline{p}+i\,\underline{\sigma}\cdot\underline{L}\right) \tag{65}$$

de manera que, una vez más, introduce el momento angular orbital $\underline{L}$. A partir de las Ecs. (62) y (65), la parte real de $\hat{H}_2\,\psi$ puede evaluarse a partir de:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}\psi\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}=i\,\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}\psi\,\frac{\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{L}}{r^2}+\cdots \tag{66}$$

De manera que:

$$\mathrm{Real}\, \hat{H}_2 \psi = -\frac{e^2 \hbar}{16\pi\epsilon_0 m^2 c^2 r^3} \underline{r} \cdot \underline{\nabla} \psi \underline{\sigma} \cdot \underline{L} \tag{67}$$

donde:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{L} = \langle \hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{L}} \rangle = \hbar \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \tag{68}$$

A partir de las Ecs. (67) y (68):

$$H_2 \psi = -\frac{e^2 \hbar^2}{16\pi\epsilon_0 m^2 c^2 r^3} \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \underline{r} \cdot \underline{\nabla} \psi \tag{69}$$

cuyos valores esperados de energía son:

$$E_2 \psi = -\frac{e^2 \hbar^2}{16\pi\epsilon_0 m^2 c^2} \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \int \psi^* \frac{\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \psi}{r^3} d\tau \tag{70}$$

En coordenadas polares esféricas:

$$d\tau = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \tag{71}$$

y:

$$\underline{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \underline{e}_\phi + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \underline{e}_\theta \tag{72}$$

Utilizando:

$$\underline{r} = r \underline{e}_r \tag{73}$$

se deduce que:

$$\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \psi = r \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{74}$$

de manera que

$$E_2\psi = -\frac{e^2\hbar^2}{16\pi\epsilon_0 m^2c^2}\left(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\right)\int \frac{\psi^*}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,d\tau \tag{75}$$

y esto se evalúa mediante álgebra computacional en la Sección 3. El resultado (75) es el mismo que el dado por el segundo término del hamiltoniano de tipo II de la página 4 en la nota de acompañamiento 252(10), publicado en el portal www.aias.us, lo cual provee una verificación cruzada de un resultado analíticamente correcto.

La estructura fina en átomos y moléculas pueden medirse con gran exactitud, de manera que resulta interesante evaluar el efecto de la gravitación sobre los espectros. Esto puede llevarse a cabo de una manera muy sencilla utilizando la prescripción mínima:

$$E \longrightarrow E + m\Phi \tag{76}$$

donde Φ es el potencial gravitacional:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \tag{77}$$

donde G es la constante de Newton y M es la masa atraída gravitacionalmente a la masa m del electrón en el átomo de hidrógeno. Al igual que en la nota de acompañamiento 253(3) del documento UFT253, publicado en el portal www.aias.us , se deduce que:

$$H\psi = \left(-m\Phi + mc^2 + \frac{1}{2m}\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\left(1-\frac{m\Phi}{2mc^2}\right)\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\right)\psi \tag{78}$$

en la aproximación:

$$E \sim mc^2, \quad m\Phi \ll 2mc^2. \tag{79}$$

El hamiltoniano orbital de espín relevante es:

$$H\psi = \frac{i\hbar}{4mc^2}\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}\Phi\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\,\psi = \frac{-i\hbar}{4mc^2}\underline{\sigma}\cdot\underline{g}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\,\psi \tag{80}$$

donde la aceleración debida a la gravedad es

$$\underline{g} = -\underline{\nabla}\Phi\,. \tag{81}$$

Es posible desarrollar la Ec. (80) de diferentes maneras, incluyendo las siguientes:

1) Considerar el efecto de la g de la Tierra sobre el electrón en un átomo de hidrógeno.

2) Evaluar el efecto de la interacción gravitacional entre un electrón y un protón en el átomo de hidrógeno.

En ambos casos, se utiliza el álgebra de Pauli:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{p} = \frac{1}{r^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{r} \left(\underline{r} \cdot \underline{p} + i \underline{\sigma} \cdot \underline{L} \right) \tag{82}$$

donde

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \tag{83}$$

es el momento angular clásico. A partir de las Ecs. (80) y (82):

$$\text{Real } \hat{H} \psi = \frac{\hbar}{4mc^2 r^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{g}\, \underline{\sigma} \cdot \underline{r}\, \underline{\sigma} \cdot \underline{L}\, \psi . \tag{83b}$$

Utilizamos ahora:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{g}\, \underline{\sigma} \cdot \underline{r} = \underline{g} \cdot \underline{r} + i \underline{\sigma} \cdot \underline{g} \times \underline{r} . \tag{84}$$

de manera que:

$$\text{Real } \hat{H} \psi = \frac{\hbar\, \underline{g} \cdot \underline{r}}{4mc^2 r^2} \underline{\sigma} \cdot \underline{L}\, \psi . \tag{85}$$

En coordenadas polares esféricas:

$$\underline{r} = r\, \underline{e}_r \tag{86}$$

y a partir de las Ecs. (81) y (86):

$$\underline{g} \cdot \underline{r} = r\, \underline{g} \cdot \underline{e}_r \tag{87}$$

Sin embargo, a partir de la Ec. (81):

$$\underline{g} = -\frac{MG}{r^3}\underline{r} = -\frac{MG}{r^2}\underline{e}_r \tag{88}$$

de manera que:

$$r\underline{g}\cdot\underline{e}_r = rg \tag{89}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{Re}\,\hat{H}\psi = \frac{\hbar^2 g}{4mc^2 r}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right)\psi \tag{90}$$

Cuando se considera la interacción gravitacional entre un electrón y un protón:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{L} = \langle\hat{\underline{\sigma}}\cdot\hat{\underline{L}}\rangle = \hbar\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right) \tag{91}$$

de manera que

$$\mathrm{Re}\,\hat{H}\psi = \frac{\hbar^2 g}{4mc^2 r}\underline{\sigma}\cdot\underline{L}\psi \tag{92}$$

que posee las unidades correctas de joules. El valor esperado de energía a partir de la Ec. (90) es:

$$E = \frac{\hbar^2 g}{4mc^2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right)\int\frac{\psi\psi^*}{r}\,d\tau \tag{93}$$

la cual se evalúa por álgebra computacional en la Sección 3. El efecto de la interacción gravitacional entre el electrón y el protón es totalmente despreciable en comparación con la interacción electrostática.

Al evaluar el efecto del campo gravitatorio de la Tierra, la Ec. (91) ya no puede utilizarse, porque $\underline{L}$ se define como:

$$\underline{L} = \underline{R}\times\underline{p} \tag{94}$$

donde $\underline{R}$ es la distancia entre el electrón y el centro de la Tierra. Por lo tanto, debe de desarrollarse otro método para calcular el efecto sobre la estructura fina de una masa externa M, por ejemplo la masa de la Tierra, del Sol o de una estrella de neutrones.

Al igual que en la nota de acompañamiento 253(4), el procedimiento habitual utilizado en la obtención de la estructura fina de átomos y moléculas es el suponer que:

$$x = \frac{e\phi}{2mc^2} \ll 1 \tag{95}$$

de manera que:

$$(1-x)^{-1} \sim 1+x \tag{96}$$

Más exactamente:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{97}$$

y si esta expansión se ve truncada en el segundo orden:

$$(1-x)^{-1} \sim 1 + x + x^2 \tag{98}$$

produciendo la siguiente expresión para la energía total:

$$E = e\phi + mc^2 + \frac{1}{2m}\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\left(1 + \frac{e\phi}{2mc^2} + \frac{e^2\phi^2}{4m^2c^4}\right)\underline{\sigma}\cdot\underline{p} \tag{99}$$

El término de segundo orden introduce un nuevo tipo de espectroscopía orbital de espín descrita por:

$$E_1 = \frac{e^2}{8m^3c^4}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\,\phi^2\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} \tag{100}$$

que se cuantiza a:

$$H_1\psi = -\frac{ie^2\hbar}{8m^3c^4}\left(\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}\phi^2\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\right)\psi + \ldots \tag{101}$$

en donde:

$$\phi^2 = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^2}, \tag{102}$$

$$\underline{\nabla}\phi^2 = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon_0^2 r^4}\underline{r}. \tag{103}$$

De manera que:

$$H_1\psi = \frac{i e^4 \hbar}{64\pi^2\epsilon_0^2 m^3 c^4 r^4}\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\psi. \tag{104}$$

Utilizando el álgebra de Pauli:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} = \underline{r}\cdot\underline{p} + i\underline{\sigma}\cdot\underline{L} \tag{105}$$

da:

$$\mathrm{Re}\,H_1\psi = \frac{-e^4\hbar^2}{64\pi^2\epsilon_0^2 m^3 c^4 r^4}\Big(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\Big)\psi \tag{106}$$

cuyos valores esperados de energía son:

$$E_1 = -\frac{e^4\hbar^2}{64\pi^2\epsilon_0^2 m^3 c^4}\Big(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\Big)\int\frac{\psi^*\psi}{r^4}d\tau \tag{107}$$

Estos se evalúan mediante álgebra computacional en la Sección 3 para las funciones de onda del átomo de hidrógeno. El resultado de primer orden es:

$$E_0 = \frac{e^2\hbar^2}{16\pi\epsilon_0 m^2 c^2}\Big(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\Big)\int\frac{\psi^*\psi}{r^3}d\tau \tag{108}$$

de manera que la relación entre los valores esperados de segundo y de primer orden es:

$$\left|\frac{E_1}{E_0}\right| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}\int\frac{\psi^*\psi}{r^4}d\tau \Big/ \int\frac{\psi^*\psi}{r^3}d\tau \tag{109}$$

Estas relaciones también se evalúan en la Sección 3 mediante álgebra computacional para las funciones de onda hidrogénicas.

Puede considerarse ahora el efecto de la gravitación mediante la prescripción mínima ampliada:

$$E \longrightarrow E - e\phi + m\Phi \tag{110}$$

que produce la energía total:

$$E = e\phi - m\Phi + mc^2 + \frac{1}{2m}\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\left(1 + \frac{e\phi - m\Phi}{2mc^2} + \frac{(e\phi - m\Phi)^2}{4m^2c^4}\right)\underline{\sigma}\cdot\underline{p} \tag{111}$$

al segundo orden. La Ec. (111) contiene el término:

$$E_2 = -\frac{e}{4m^2c^4}\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\,\phi\Phi\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} \tag{112}$$

Esto puede utilizarse para considerar el efecto de la gravitación externa de una masa M sobre la estructura fina del átomo de hidrógeno. Utilizando los potenciales:

$$\phi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \Phi = -\frac{GM}{R} \tag{113}$$

donde r es la distancia entre el protón y el electrón en un átomo de hidrógeno, y donde R es la distancia entre el electrón y el centro de la masa externa M, por ejemplo la Tierra.

La cuantización de la Ec. (112) produce:

$$H_2\psi = \frac{ie\hbar}{4m^2c^4}\underline{\sigma}\cdot\underline{\nabla}(\phi\Phi)\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\,\psi \tag{114}$$

Utilizando del Teorema de Leibnitz:

$$\underline{\nabla}(\phi\Phi) = \Phi\underline{\nabla}\phi + \phi\underline{\nabla}\Phi \tag{115}$$

por lo tanto:

$$H_2\psi = -\frac{ie^2\hbar MG}{16\pi\epsilon_0 m^2c^4}\left(\frac{1}{Rr^3}\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} + \frac{1}{rR^3}\underline{\sigma}\cdot\underline{R}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p}\right)\psi \tag{116}$$

donde:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{r}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} = \underline{r}\cdot\underline{p} + i\,\underline{\sigma}\cdot\underline{L} \tag{117}$$

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{R}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{p} = \underline{R}\cdot\underline{p} + i\,\underline{\sigma}\cdot\underline{L}_1 \tag{118}$$

y donde:

$$\underline{L} = \underline{r}\times\underline{p}\,, \tag{119}$$

$$\underline{L}_1 = \underline{R}\times\underline{p}\,. \tag{120}$$

El término relevante es:

$$H_2\psi = \frac{e^2\hbar^2 MG}{16\pi\epsilon_0 m^2 c^4 R r^3}\Big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\Big)\psi \tag{121}$$

el cual da los valores esperados de energía:

$$E_2 = \frac{e^2\hbar^2}{16\pi\epsilon_0 m^2 c^2}\left(\frac{MG}{Rc^2}\right)\Big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\Big)\int \frac{\psi^*\psi}{r^3}\,d\tau \tag{122}$$

Una comparación entre las Ecs. (108) y (122) nos muestra que:

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{MG}{Rc^2}\,. \tag{123}$$

El efecto de una masa externa *M* ubicada a una distancia *R* del electrón es un cambio en el espectro por un factor:

$$\xi = \frac{MG}{Rc^2}\,. \tag{124}$$

Para la Tierra:

$$\xi = 1{,}39\times10^{-9} \tag{125}$$

Para el Sol:

$$\xi = 4{,}242\times10^{-5} \tag{126}$$

En una estrella de neutrones típica:

$$\xi = 3{,}442 \text{ a } 7{,}867 \tag{127}$$

de manera que si hay un átomo de hidrógeno en la atmósfera de una estrella de neutrones, su espectro de estructura fina muestra una diferencia medible respecto del mismo espectro en un laboratorio ubicado en la Tierra.

Finalmente, se consideran en esta sección los efectos relativistas de orden superior. Consideremos la ecuación de energía de Einstein (33) expresada como:

$$E = mc^2 + \frac{c^2 p^2}{E + mc^2} \,. \tag{128}$$

El factor *g* del electrón, REE, RMN, IRM, el factor de Lande, los efectos Zeeman, el factor de Thomas, la constante de estructura fina, el término de Darwin y todos los nuevos efectos hallados en los documentos inmediatamente precedentes han sido evaluados utilizando:

$$E \sim mc^2 \tag{129}$$

Las Ecs. (128) y (129) producen la energía cinética no relativista:

$$T = E - mc^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{130}$$

Sin embargo, la energía total se define mediante:

$$E = \gamma mc^2 \tag{131}$$

de manera que, de una manera más exacta, la Ec. (128) es:

$$E = mc^2 + \frac{c^2 p^2}{mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} + mc^2} \tag{132}$$

Si

$$v \ll c \tag{133}$$

entonces:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \sim 1+\frac{v^2}{2c^2} \tag{134}$$

y en la misma aproximación:

$$p \sim mv. \tag{135}$$

Esto se cuantiza a la ecuación de Schroedinger de orden superior:

$$H\psi = (E - mc^2)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\nabla^4\psi \tag{136}$$

que es la ecuación de Schroedinger para una partícula libre:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{137}$$

con una pequeña perturbación relativista. Las soluciones de la Ec. (137) pueden hallarse numéricamente utilizando la función de onda de la partícula libre como un punto inicial en un procedimiento iterativo. Las funciones de onda resultante pueden entonces utilizarse en teoría de tunelación cuántica para partícula relativistas. Al igual que en los documentos UFT226 a UFT231 en el portal www.aias.us , este procedimiento puede brindar alguna perspectiva en el caso de las reacciones nucleares de baja energía.

Las correcciones relativistas de orden superior para efectos magnéticos, tales como la resonancia de espín electrónica, pueden evaluarse de una manera similar; detalles completos de lo anterior se incluyen en la nota de acompañamiento 253(7). El punto de arranque es la descripción semi-clásica habitual para la interacción del electrón y el campo magnético en relatividad restringida:

$$(E - e\phi)^2 = c^2(\underline{p} - e\underline{A})^2 + m^2c^4 \tag{138}$$

en donde los efectos magnéticos se describen mediante el potencial vectorial $\underline{A}$. En teoría ECE completamente desarrollada, también se considera la conexión de espín. Se deduce entonces que:

$$E = e\phi + mc^2 + \frac{c^2(\underline{p} - e\underline{A})^2}{E - e\phi + mc^2} \tag{139}$$

donde la energía total es:

$$E = \gamma m c^2 \tag{140}$$

La Ec. (139) se cuantiza a:

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2m}\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\left(\frac{2}{\gamma+1}\left(1-\frac{e\phi}{(\gamma+1)mc^2}\right)^{-1}\right)\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\psi+\ldots \tag{141}$$

la cual puede aproximarse mediante:

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2m}\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\frac{2}{\gamma+1}\left(1-\frac{e\phi}{(\gamma+1)mc^2}\right)\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\psi+\ldots \tag{142}$$

Ahora utilizamos las aproximaciones:

$$\gamma+1 = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}+1 \sim 2+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{143}$$

y:

$$\frac{2}{\gamma+1} = \left(1+\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \sim 1-\frac{v^2}{4c^2} \tag{144}$$

para hallar que el hamiltoniano en la Ec. (142) puede aproximarse mediante:

$$H\psi = \frac{1}{2m}\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\left(1-\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\right)^2\frac{e\phi}{mc^2}\right)\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\psi \tag{145}$$

dando correcciones relativistas para todos los términos dados generalmente por:

$$H_0\psi = \frac{1}{2m}\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\left(1+\frac{e\phi}{2mc^2}\right)\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\psi \tag{146}$$

Nótese ahora que:

$$v^2 = \frac{1}{m^2}\left(\underline{p}-e\underline{A}\right)\cdot\left(\underline{p}-e\underline{A}\right) \tag{147}$$

y en la base SU(2):

$$v^2 = \underline{\sigma} \cdot \underline{v}\, \underline{\sigma} \cdot \underline{v} = \frac{1}{m^2} \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right). \tag{148}$$

Si restringimos las consideraciones al primer término en la Ec. (145) se obtienen las correcciones relativistas para REE a partir de:

$$H_1 \psi = \frac{1}{2m} \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \left(1 - \frac{1}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right)\right) \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \psi \tag{149}$$

El primer término en la Ec. (149) es el término habitual de REE y se calcula de la misma manera que en el documento UFT248 con la representación del operador:

$$\underline{p} = -i\hbar \underline{\nabla} \tag{150}$$

De manera que:

$$H_{11} \psi = \frac{1}{2m} \Big(-\hbar^2 \nabla^2 \psi + e^2 A^2 \psi + ie\hbar \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{A} \psi\right) - e\hbar \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} \times \left(\underline{A} \psi\right) + ie\hbar \underline{A} \cdot \underline{\nabla} \psi - e\hbar \underline{\sigma} \cdot \underline{A} \times \underline{\nabla} \psi \Big) \tag{151}$$

que puede expresarse como la suma del conocido término de REE más otros términos:

$$H_{11} \psi = -\frac{e\hbar}{2m} \underline{\sigma} \cdot \underline{B} \psi + \ldots \tag{152}$$

El segundo término en la Ec. (149) es el cuártico:

$$H_{12} \psi = \frac{-1}{8m^3c^2} \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \underline{\sigma} \cdot \left(\underline{p} - e\underline{A}\right) \psi \tag{153}$$

y puede desarrollarse en muchas formas diferentes para dar varios tipos de espectros enteramente novedosos, cada uno de los cuales debiera de poder observarse experimentalmente. Como punto final de esta sección, se incluyen dos ejemplos. En primer lugar, consideremos la representación del operador función:

$$H_{12}\psi = -\frac{1}{8m^3c^2}(\underline{p}-e\underline{A})\cdot(\underline{p}-e\underline{A})\underline{\sigma}\cdot(-i\hbar\underline{\nabla}-e\underline{A})\sigma\cdot(-i\hbar\underline{\nabla}-e\underline{A})\psi$$

$$= \frac{e\hbar}{8m^3c^2}\underline{\sigma}\cdot\underline{B}\left(p^2-2e\underline{p}\cdot\underline{A}+e^2A^2\right)\psi+\ldots \quad (154)$$

En un campo magnético uniforme:

$$\underline{A} = \frac{1}{2}\underline{B}\times\underline{r} \quad (155)$$

y:

$$\underline{p}\cdot\underline{B}\times\underline{r} = \underline{B}\cdot\underline{r}\times\underline{p} = \underline{B}\cdot\underline{L} \quad (156)$$

De manera que

$$H_{12}\psi = -\frac{e^2\hbar}{8m^3c^2}\underline{L}\cdot\underline{B}\underline{\sigma}\cdot\underline{B}\psi+\ldots \quad (157)$$

Si *B* se encuentra alineado con el eje Z:

$$H_{12}\psi = -\frac{e^2\hbar}{8m^3c^2}L_z\sigma_z B_z^2\psi \quad (158)$$

Ahora utilizamos:

$$\underline{S} = \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma} \quad (159)$$

de manera que:

$$H_{12}\psi = -\frac{e^2}{4m^3c^2}L_z S_z B_z^2\psi = -\frac{e^2\hbar^2}{4m^3c^2}m_L m_s B_z^2\psi \quad (160)$$

donde los números cuánticos magnéticos vienen dados por:

$$m_L = -L,\ldots,L \quad (161)$$

$$m_s = -S,\ldots,S \quad (162)$$

Esto es un desdoblamiento de espín de segundo orden cuyo orden de magnitud es:

$$f_{12} = 111{,}88\, m_L B_Z^2 H_2 \tag{163}$$

que se compara con la conocida frecuencia de resonancia de primer orden:

$$f = 2{,}80 \times 10^{10} B_Z H_2 \tag{164}$$

Este tipo de corrección relativista es un pequeño corrimiento, no muy diferente de la magnitud del conocido corrimiento químico, y por lo tanto debiera de ser observable.

En la representación del operador puro, la Ec. (153) es:

$$H_2\psi = \frac{e\hbar}{8m^3c^2}\left(-\hbar^2\nabla^2 + ie\hbar\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \underline{A}\cdot\underline{\nabla}\right) + e^2A^2\right)\underline{\sigma}\cdot\underline{B}\psi + \ldots \tag{165}$$

La parte real de este hamiltoniano es:

$$\mathrm{Re}\,H_2\psi = \frac{-e\hbar^3}{8m^3c^2}\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{\sigma}\cdot\underline{B}\psi + \frac{e^3\hbar A^2}{8m^3c^2}\underline{\sigma}\cdot\underline{B}\psi \tag{166}$$

Para el campo magnético uniforme (155):

$$A^2 = \frac{1}{4}\underline{B}\times\underline{r}\cdot\underline{B}\times\underline{r} = \frac{1}{4}\left(B^2r^2 - \underline{B}\cdot\underline{r}\,\underline{B}\cdot\underline{r}\right) \tag{167}$$

Para un campo magnético del eje Z:

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{B}\psi = \sigma_Z B_Z\psi \tag{168}$$

y

$$A^2 = \frac{1}{4}B_Z^2\left(r^2 - Z^2\right) = \frac{1}{4}B_Z^2r^2\left(1-\cos^2\theta\right) \tag{169}$$

en coordenadas polares esféricas. Se encuentra que:

$$\mathrm{Re}\, H_2 \psi = H_{11}\psi + H_{12}\psi \tag{170}$$

donde

$$H_{11}\psi = -\frac{e\hbar\sigma_Z B_Z}{8m^3c^2}\nabla^2\psi \tag{171}$$

y

$$H_{12}\psi = \frac{e^3\hbar\sigma_Z B_Z^3}{32\,m^3c^2} r^2\left(1-\cos^2\theta\right)\psi . \tag{172}$$

El componente Z de la matriz de Pauli es:

$$\sigma_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{173}$$

y puede ocurrir resonancia entre estados de σ_Z . Los valores esperados de energía para este tipo de corrección relativista son:

$$E_{11} = -\frac{e\hbar^3\sigma_Z B_Z}{8m^3c^2}\int \psi^*\nabla^2\psi\, d\tau \tag{174}$$

y

$$E_{12} = \frac{e^3\hbar\sigma_Z B_Z^3}{32\,m^3c^2}\int \psi^* r^2\left(1-\cos^2\theta\right)\psi\, d\tau \tag{175}$$

y se evalúan en la Sección 3 para las funciones de onda hidrogénicas. Estos se comparan con los resultados no relativistas, los conocidos:

$$H\psi = -\frac{e\hbar}{2m}\underline{\sigma}\cdot\underline{B}\,\psi \tag{176}$$

Las frecuencias de resonancia son:

$$\omega_0 = eB_Z/m \tag{177}$$

$$\omega_{11} = \frac{e\hbar^2 B_Z}{4m^3c^2}\int \psi^* \nabla^2 \psi \, d\tau \tag{178}$$

$$\omega_{12} = \frac{e^3 B_Z^3}{16m^3c^2}\int \psi^* r^2 (1-\cos^2\theta)\psi \, d\tau \tag{179}$$

Las correcciones relativistas dependen del orbital en el que el electrón se encuentre ubicado, de manera que habrían de esperarse espectros interesantes.

3. Cálculo de las funciones de onda hidrogénicas.

Sección a cargo del Dr. Horst Eckardt

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS y otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por la publicación en red y a Alex Hill por las traducciones.

Referencias.

[1] M. W. Evans, Ed., "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity", número especial seis de la ref. (2).

[2] M. W. Evans, Ed., Journal of Foundations of Physics and Chemistry, (Cambridge International Science Publishing, CISP, www.cisp-publishing.com, a partir del mes de junio de 2011).

[3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation (CISP, 2011).

[4] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2005 a 2011) en siete volúmenes.

[5] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis, 2007). Hay traducción al castellano por Alex Hill en la Sección en Español del portal www.aias.us .

[6] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific 2001).

[7] M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley 1992, 1993, 1997, 2001) en dos ediciones y seis volúmenes.

[8] M. W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 a 2002) en cinco volúmenes en encuadernación dura y cinco volúmenes en encuadernación blanda.

[9] M .W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific 1994).

[10] M. W. Evans, "The Photon's Magnetic Field" (World Scientific, 1992).

[11] E. Merzbacher, "Quantum Mechanics" (Wiley, 1970, 2ª edición).

[12] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory" (Cambridge University Press, 1996, 2ª ed.)