

Orbitales de los átomos de Bohr y Sommerfeld a través de la Teoría x cuantizada.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,
Civil List y AIAS

www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.upitec.org,
www.et3m.net

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se demuestra que los niveles de energía del átomo de Bohr, y los radios de Bohr para el átomo, vienen dados por una elipse estática de la teoría x en el límite de desaparición de la excentricidad. El átomo de Sommerfeld constituye la conexión relativista del átomo de Bohr, y se demuestra que sus órbitas son elipses con precesión de la teoría x . En la transición desde la teoría de Bohr a la teoría de Sommerfeld la velocidad de la transformación de Lorentz permanece constante, y es la velocidad de Bohr. Los niveles de energía y otras características del átomo de Sommerfeld pueden calcularse directamente a partir de la teoría x , la cual es la teoría ECE en la que la velocidad angular es la conexión de espín. Se introduce un novedoso esquema de cuantización en el que el factor x de la precesión se iguala con el número cuántico principal n .

Palabras clave: teoría ECE, teoría x de los átomos de Bohr y de Sommerfeld.

1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1-10] se ha desarrollado la teoría x de órbitas planas a partir de la teoría ECE, con el resultado de que se han explicado varios fenómenos bien conocidos de precesión planetaria con el mismo grado actual de precisión utilizado en las observaciones experimentales. La teoría x de la precesión planetaria se basa directamente en la precesión observada experimentalmente en una elipse, y se demuestra que el origen de la precesión es la rotación de la métrica de Minkowski en la precesión de Thomas (ver nota de acompañamiento 1 y 2 de este documento UFT266 en el portal www.aias.us). Se ha utilizado en forma consistente la misma teoría para explicar la desviación electromagnética debido a la gravitación y la demora temporal por causa gravitacional. También se utilizó para deducir la velocidad relativista del fotón y la masa del fotón. El corrimiento al rojo por causa gravitacional se explicó utilizando la métrica de Minkowski de la teoría x , en la que la velocidad del factor de Lorentz es la velocidad orbital. En general, esta velocidad no es una constante. Se utilizó la misma teoría x en el documento UFT264 para refutar la teoría de Einstein de la gravitación, al demostrar que la misma produce un valor infinito. La ley de fuerza correcta de los orbitales con precesión se obtiene a través de la teoría x utilizando la ecuación de Binet. Se obtiene la ley de fuerza de Leibniz del año 1689 multiplicada por el cuadrado de x . La teoría de Einstein da una ley de fuerza diferente, la cual nunca podría dar una elipse con precesión.

En la Sección 2, se desarrollan las teorías de Bohr y Sommerfeld del átomo en términos de elipses estática y con precesión para la teoría x . Se demuestra que la teoría de Bohr del año 1913 es el límite para una elipse de la teoría x cuya semi latitud recta da los radios de Bohr en forma inmediata mediante su cuantización. Este resultado se cumple para cualquier valor de elipticidad. Los conocidos niveles de energía del átomo de Bohr se obtienen inmediatamente en el límite de una elipticidad en desaparición, es decir cuando la elipse de la teoría x se transforma en un círculo, las conocidas órbitas circulares del átomo de Bohr. La teoría del átomo de Sommerfeld, desarrollada en el año de 1915, fue la primera teoría cuántica relativista en la que se construyó un hamiltoniano a partir de la suma de la energía cinética relativista y la energía de atracción coulombica. Se demuestra en la Sección 2 que el átomo de Sommerfeld resulta consistente con una elipse con precesión, cuyas características son ligeramente diferentes de una órbita circular porque las correcciones relativistas son pequeñas. La velocidad orbital lineal en el átomo de Sommerfeld es la misma que en el átomo de Bohr, y es igual a la velocidad de Bohr. Este resultado se obtiene a partir de la métrica de Minkowski utilizada en la teoría de Sommerfeld. Esta última se desarrolla a partir tanto del hamiltoniano como de la ley de fuerza relativista. Finalmente, en la Sección 2, se introduce un novedoso esquema de cuantización en el que el factor x de precesión de la elipse se iguala con el número cuántico principal n . Estos resultados de cuantización de Eckardt provocan la aparición de una estructura ondulatoria sobreimpuesta a la elipse, y se incluyen comentarios en la Sección 3. En la misma Sección 3 se analizan numéricamente las características del átomo de Sommerfeld y se obtienen novedosos resultados a partir de la teoría del átomo de Sommerfeld.

2. Cuantización de la teoría x.

La teoría de Bohr para el átomo de hidrógeno se describe a través de la ley de fuerza:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{L^2}{m r^3} = 0 \quad (1)$$

donde m es la masa del electrón en órbita alrededor del protón, y donde $-e$ es la carga en el electrón. Aquí, L es el momento angular total conservado, ϵ_0 es la permitividad en el vacío en unidades del S. I. y donde r es la distancia entre el electrón y el protón. El átomo original de Bohr, del año 1913, fue una teoría que supuso órbitas circulares:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad (2)$$

de manera que, a partir de la Ec. (1):

$$\frac{L^2}{m r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3)$$

Bohr supuso la Ec. (3) de una manera *ad hoc*, ó heurística, pero de hecho parte del resultado de suponer órbitas circulares en la Ec. (1). Esta última es precisamente análoga a la ecuación de las órbitas de Leibniz del año 1689, y aún se utiliza en la actualidad:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{m M G}{r^2} + \frac{L^2}{m r^3} \quad (4)$$

donde una masa m está en órbita alrededor de una masa M , y donde G es la constante de Newton. La Ec. (3) definió los radios de Bohr:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m e^2} \quad (5)$$

al efectuar la cuantización, como sigue:

$$L = n \hbar. \quad (6)$$

Aquí, n es el número cuántico principal y \hbar es la constante reducida de Planck. El radio de Bohr se define para el valor más bajo de n , que es igual a la unidad. En general:

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

La velocidad lineal orbital total del electrón en el átomo de Bohr es [1-11]:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (8)$$

En vista de la Ec. (2):

$$v = v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r \omega \quad (9)$$

donde la velocidad angular ω es la conexión de espín de la teoría x [1-10], la cual se basa en la geometría de Cartan con una torsión distinta de cero. La velocidad de Bohr es, por lo tanto:

$$v = v_\theta = \omega r = \frac{L}{m r} = \frac{v \hbar}{m r} \quad (10)$$

donde r es el radio de Bohr (5). La velocidad v se define en relatividad restringida mediante la métrica de Minkowski:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \quad (11)$$

donde τ es el tiempo propio. Por lo tanto, la v utilizada en relatividad restringida es la v definida en forma clásica a partir de la Ec. (8), y así la v en el átomo de Sommerfeld es la misma que la velocidad de Bohr. Este descubrimiento constituye una forma útil para relacionar ambas teorías.

Por lo tanto, es hamiltoniano del átomo de Bohr es:

$$H = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} = T + V \quad (12)$$

en donde la velocidad es:

$$v = v_\theta = \frac{L}{m r} \quad (13)$$

Aquí, T es la energía cinética clásica, V es la energía potencial clásica y la energía total E es una constante de movimiento definida por:

$$H = E = \frac{L^2}{2 m r^2} - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \quad (14)$$

A partir de la Ec. (3):

$$\frac{L^2}{2mr^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (15)$$

de manera que la energía total es

$$E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (16)$$

y posee un valor negativo porque es un energía de atracción del electrón hacia el protón. A partir de las Ecs. (5) y (16):

$$E = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \quad (17)$$

que son los niveles de energía no relativista del átomo de Bohr, Q. E. D. Para el hidrógeno atómico (H) son también los niveles energía de la ecuación de Schroedinger para H.

La órbita de la teoría de Bohr (1) y la teoría de Leibniz (4) es una elipse. Una teoría se transforma en la otra de la siguiente manera:

$$k = mMG \longrightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (18)$$

La elipse se define mediante:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\theta} \quad (19)$$

donde la semi latitud recta es:

$$\alpha = \frac{L^2}{mk} \quad (20)$$

y donde la elipticidad es [1-11]:

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \quad (21)$$

El semieje mayor es:

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} := \frac{k}{2E} \quad (22)$$

y el semieje menor es:

$$b = \frac{\alpha}{(1-\epsilon^2)^{1/2}} = \frac{L}{(2mE)^{1/2}} \quad (23)$$

El perihelio es la distancia de máxima aproximación de m a M y se define mediante:

$$r_{\text{mín}} = a(1-\epsilon) = \frac{\alpha}{1+\epsilon} \quad (24)$$

y el aphelio es la máxima separación entre m y M , definida por:

$$r_{\text{máx}} = a(1+\epsilon) = \frac{\alpha}{1-\epsilon} \quad (25)$$

El radio de Bohr se obtiene inmediatamente a partir de la semi latitud recta:

$$\alpha = r = \frac{L^2}{mk} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad (26)$$

En el año 1913, Bohr supuso efectivamente que la elipse se reduce a un círculo, en cuyo caso desaparece la excentricidad:

$$\epsilon = 0 \quad (27)$$

A partir de la Ec. (21) esta suposición significa que:

$$\frac{2EL^2}{mk^2} = -1 \quad (28)$$

de manera que los niveles de energía del átomo de Bohr se obtienen inmediatamente a través de la Ec. (28):

$$E = - \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (29)$$

que es la Ec. (17), Q. E. D. Este resultado dio las principales características del espectro del H atómico con un grado de precisión similar al más avanzado en el campo experimental. Ahora se sabe la razón fundamental para esto, ya que la teoría constituye un ejemplo de la geometría de Cartan y la teoría ECE. Sin embargo, la forma en que se enseña la teoría de Bohr afirma que Bohr supuso que la fuerza de atracción era igual a la fuerza centripeta. Esta suposición se representa en la Ec. (3), y resulta equivalente a suponer una órbita circular. En la teoría de Schroedinger para el átomo de H, por otro lado, no se supone en general que la fuerza coulombica de atracción sea igual a la fuerza centripeta, y sin embargo los mismos niveles de

energía para el átomo de H emergen para ambas teorías. El átomo de Schroedinger constituye un ejemplo de la ecuación de onda de la teoría ECE [1-10] en el límite no relativista de la ecuación del fermión, y nuevamente constituye el resultado de la geometría. La razón por la cual los niveles de energía H son los mismos en las teorías de Bohr y Schroedinger para el H es que los niveles de energía H en el átomo de Schroedinger son orbitales S. De una manera más general, la teoría de Bohr constituye una elipse cuantizada, y los orbitales de Bohr ya no son círculos. Los orbitales de Bohr se desarrollan en general hacia orbitales de Schroedinger.

La teoría del átomo de Sommerfeld de 1915 fue la primera teoría cuántica relativista y constituye un ejemplo de teoría x en la que el orbital es una elipse con precesión. Se basa en el hamiltoniano:

$$H = E = (\gamma - 1) m c^2 - \frac{k}{r} \quad (30)$$

donde la energía cinética relativista es:

$$T = (\gamma - 1) m c^2 \quad (31)$$

y donde γ es el factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (32)$$

Tal como ya se ha comentado, la velocidad orbital de la teoría de Sommerfeld es la misma que la de la teoría de Bohr porque la teoría de Sommerfeld se basa en la métrica de Minkowski:

$$c^2 d\tau^2 = (c^2 - v^2) dt^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 \quad (33)$$

De manera que la velocidad del factor de Lorentz es:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \quad (34)$$

En el átomo de Bohr ésta es la velocidad de Bohr:

$$\frac{v}{c} = \frac{\alpha f}{n} \quad (35)$$

donde la constante de estructura fina se define mediante:

$$\alpha_f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c \epsilon_0} = 0.007297351 \quad (36)$$

y donde la velocidad de la luz en el vacío es c .

Por lo tanto, el factor de Lorentz en la teoría del átomo de Sommerfeld es:

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \left(\frac{\alpha_f Z}{n}\right)^2\right)^{-1/2} \quad (37)$$

Además de la ecuación de energía (30), también debe considerarse la ecuación de fuerza del átomo de Sommerfeld. La fuerza relativista correspondiente a la energía cinética relativista utilizada en la Ec. (30) se define [11] como:

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \underline{v}) \quad (38)$$

de manera que la integral de trabajo produce el resultado:

$$\int \underline{F} \cdot d\underline{r} = (\gamma - 1) m c^2 \quad (39)$$

En la Ec. (38) el momento lineal relativista es:

$$\underline{p} = \gamma m \underline{v}. \quad (40)$$

Por lo tanto, la fuerza relativista es:

$$\underline{F} = \gamma m \frac{d\underline{v}}{dt} + m \underline{v} \frac{d\gamma}{dt} \quad (41)$$

donde

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt}, \quad (42)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\gamma}{dv} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \quad (43)$$

y la fuerza relativista se define mediante:

$$\underline{F} = \gamma_m \frac{d\underline{v}}{dt} + m \gamma^3 \frac{\underline{v}}{c^2} \underline{v} \quad (44)$$

Si se supone que:

$$v \ll c \quad (45)$$

la fuerza relativista se aproxima mediante:

$$\underline{F} \sim \gamma_m \frac{d\underline{v}}{dt} \quad (46)$$

En coordenadas polares planas [1-11] la fuerza de Sommerfeld es, por lo tanto:

$$\underline{F} = \gamma_m (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) = -\frac{k}{r^2} \quad (47)$$

donde k se define mediante:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (48)$$

Se obtiene a partir de la Ec. (47) que:

$$m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{L^2}{m r^3} - \left(1 - \left(\frac{df}{dn}\right)^2\right)^{1/2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (49)$$

y en general es distinta de cero. Difiere de la órbita de Bohr (1) a través del factor de Lorentz y multiplica el segundo término del lado derecho de la ecuación.

El tipo más general de sección cónica de la teoría x [1-10] es:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\nu\theta)} \quad (50)$$

y la ley de fuerza de la órbita de Sommerfeld se define en general mediante:

$$\underline{F} = \gamma_m (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) = -\frac{\gamma L^2}{m r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = -\frac{k}{r^2} \quad (51)$$

en la que:

$$m \ddot{r} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{L^2}{m r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (52)$$

A partir de las Ecs. (50) y (52):

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \chi^2 \frac{L^2}{m r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (53)$$

En un círculo:

$$r = \alpha \quad (54)$$

de manera que para una órbita circular:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \quad (55)$$

que es la teoría de Bohr. En la teoría de Sommerfeld, con sus orbitales elíptico con precesión (50), la Ec. (53) se cumple para todos los valores de x .

A partir de la Ec. (51):

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{m r^3} - \frac{1}{\gamma} \frac{k}{r^2} \quad (56)$$

y a partir de las Ecs. (53) y (56):

$$\chi^2 = \left(\frac{L^2}{m r^3} - \frac{1}{\gamma} \frac{k}{r^2} \right) \left(\frac{L^2}{m r^3} - \frac{L^2}{\alpha m r^2} \right) \quad (57)$$

La elipse con precesión se reduce a una elipse estática si:

$$\chi = 1 \quad (58)$$

en cuyo caso:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{k}{r^2} = \frac{L^2}{\alpha m r^2} \quad (59)$$

y

$$\alpha = \frac{\gamma L^2}{mk} = \gamma r_B \quad (60)$$

donde r_B es el radio de Bohr:

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 k}{me^2} \quad (61)$$

Para una elipse estática, la Ec. (53) se reduce a:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= \frac{k^2}{mr^3} - \left(1 - \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^{1/2}\right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^2\right)^{1/2}\right) \end{aligned} \quad (62)$$

que es la Ec. (49) Q. E. D, utilizando radio de Bohr (61). En la teoría de Bohr:

$$r_B = \alpha \quad (63)$$

y la elipse estática se reduce a un círculo. Recordemos que las velocidades de Bohr y de Sommerfeld son la misma, y que la velocidad de Bohr se define mediante la Ec. (10). Utilizando esta condición en la Ec. (57) resulta en una expresión para x :

$$x^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)^{-1} \quad (64)$$

donde r en esta expresión es el radio de Bohr:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 k^2}{me^2} = \frac{\hbar}{mc} \cdot \frac{n^2}{\alpha k} \quad (65)$$

y donde el factor de Lorentz se define mediante la Ec. (37).

En resumen, el átomo de Sommerfeld se define mediante una elipse con precesión de la teoría x en la que:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(x\theta)} \quad (66)$$

y donde la semi latitud recta es:

$$\alpha = r \left(1 - \frac{1}{\chi^2} \left(1 - \frac{1}{\chi} \right) \right)^{-1} \quad (67)$$

en la que r es el radio de Bohr.

$$r = \frac{\hbar^2}{mc} \cdot \frac{n}{\alpha_f} \quad (68)$$

Los niveles de energía del átomo de Sommerfeld son:

$$E = mc^2 \left(1 - \left(\frac{\alpha_f}{n} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 - \left(\frac{\alpha_f^2}{n} \right) \quad (69)$$

La elipticidad del átomo de Sommerfeld es:

$$e^2 = 1 + \frac{2E\alpha}{k} \quad (70)$$

Seleccionando el valor de x en un dado intervalo, es posible calcular estas propiedades, y los resultados de este análisis computacional se incluyen en la Sección 3. En la nota de acompañamiento 266(4) que acompaña este documento UFT266 en el portal www.aiaa.us, se ha sugerido un nuevo tipo de cuantización de la teoría orbital. Se ha denominado a la misma como cuantización de Eckardt, con el objeto de distinguirla de la cuantización de Bohr y de Sommerfeld. La cuantización de Eckardt se basa en la teoría de órbitas [1-11] en la que el factor de precesión puede expresarse como:

$$\chi = 1 + \frac{r_0}{\alpha} \quad (71)$$

donde r_0 es una constante. En órbitas planetarias con precesión, la observación con el mayor grado de precisión disponible demuestra que ésta es:

$$r_0 = \frac{3MG}{c^2} \quad (72)$$

Sin embargo, en teoría atómica, r_0 puede suponerse como una constante desconocida por motivos argumentales. La cuantización de Eckardt supone que x es el número cuántico principal:

$$\chi = n \quad (73)$$

lo cual significa que:

$$\alpha = \frac{r_0}{n-1}, \quad n \neq 1.$$

(24)

Esta teoría trae como resultado ondas sobreimpuestas a la elipse, tal como se ilustra en la Sección 3. La elipse ya no presenta precesión, pero desarrolla estas ondas, relacionadas con las longitudes de onda de Broglie / Compton. Hay n ondas por elipse. En futuros trabajos podría intentarse relacionar los esquemas de cuantización de Eckardt con los de Bohr, porque se sabe en general que el orbital de Bohr también es una elipse en la que la semi latitud recta y la excentricidad también están cuantizadas.

3. Computación y análisis.

La primera gráfica (Fig. 1) muestra las órbitas circulares de Bohr para $n = 1$ hasta $n = 4$ en unidades atómicas:

$$\alpha_f = 0.0072973525, \quad c = 1 / \alpha_f, \quad \hbar = m = k = 1. \quad (75)$$

Entonces la Ec. (5) se convierte simplemente en

$$r_b = n^2 \quad (76)$$

Los niveles de energía de Bohr correspondientes (Ec.(17)) son

$$E_B = 1 / 2n^2 \quad (77)$$

en unidades Hartree. La energía de Sommerfeld viene dada por la Ec.(69). Las energías de Bohr y Sommerfeld se muestran en la Tabla 1, junto con los factores γ , para los números cuánticos n . Las diferencias en energía son pequeñas y los factores γ se desvían de la unidad en menos de 10^{-4} . Las desviaciones se vuelven aún menores para valores crecientes de n .

| n | E_{Bohr} | E_{Somm} | γ |
|-----|------------|------------|-----------|
| 1 | -0.5000000 | -0.4999800 | 1.0001065 |
| 2 | -0.1250000 | -0.1249988 | 1.0000266 |
| 3 | -0.0555556 | -0.0555553 | 1.0000118 |
| 4 | -0.0312500 | -0.0312499 | 1.0000067 |

Tabla 1: Niveles de energía de Bohr y de Sommerfeld (en unidades Hartree) y factor γ para los números cuánticos n .

El factor de precesión de la teoría de Sommerfeld, x^2 , se relaciona con la semi latitud recta α de la elipse con precesión a través de las Ecs.(64) y (67). El factor x^2 depende del número cuántico n a través del radio de Bohr (75) y de la velocidad (35) que aparecen en el factor γ (37). La dependencia de $x^2(\alpha)$ se representa gráficamente en la Fig. 2 como una función del argumento $\alpha.n^2$, de manera que todos los radios de Bohr se cambian a $\alpha = 1$ y pueden compararse directamente. Hay un polo agudo en $\alpha \approx r_B$ o, más precisamente, $\alpha = \gamma r_B$. Este polo se vuelve aún más agudo para valores crecientes de n . Por lo tanto, hay sólo un pequeño rango alrededor de los radios de Bohr en donde están definidos las elipses de Sommerfeld, específicamente en la región con $x^2 \approx 1$. Vemos que la cuantización de órbitas de Bohr se relaja ligeramente en la teoría de Sommerfeld, pero permanece esencialmente válida.

La relación inversa $\alpha(x)$ se representa gráficamente en la Fig 4. Los valores de α se han normalizado a través de r_B ó n^2 , respectivamente, de manera que la escala de y resulta comparable. Vemos una muy pequeña variación en el rango de α que se vuelve aún menor para valores crecientes de x , de acuerdo con la Fig. 3.

La elipticidad ε de la teoría de Sommerfeld puede expresarse mediante las Ecs.(20) y (21) mediante

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2 \frac{E \alpha}{k}} \quad (78)$$

(ver la Ec.(70)) con α dada por la Ec.(67) y E dada por la Ec.(69). Así, ε depende de x y de n . La Fig. 4 nos muestra que ε no está definida para $x < 0.8$, ya que en dicho caso el argumento de la raíz cuadrada se vuelve negativo. Para valores crecientes de x , la elipticidad ε se ve acotada por una asíntota para cada valor de n . La pequeña magnitud de ε nos muestra una vez más que las elipses de Sommerfeld se aproximan extremadamente en su forma a círculos.

El efecto de la velocidad de Bohr (35) se ha investigado mediante una duplicación artificial del valor de este término. Entonces, $\varepsilon(x)$ sólo comienza en 1.6 (Fig. 5). Esto resulta sin sentido físico, porque $x = 1$ debe de incluirse en el rango de ε . Los resultados son sensibles al valor de v .

La parte final de esta sección investiga la cuantización de Eckardt. Si insertamos la Ec.(74) en la ecuación para la elipse con precesión (50) se obtiene

$$r = \frac{r_0}{(n-1)\varepsilon \cos(n\theta)} \quad (79)$$

Estas órbitas se representan en la Fig. 6. Para $n = 1$, donde r diverge, se ha supuesto una órbita circular y se utilizó un valor constante de $\varepsilon = 0.3$ para todas las gráficas. Puede observarse que la cuantización de Eckardt da origen a órbitas cerradas (ondas circulares estáticas) donde n representa el número de máximos.

A partir de la teoría de Sommerfeld sabemos que la elipticidad es una función de la energía, por lo que intentamos deducir una expresión correspondiente para la cuantización de Eckardt. Dado que las órbitas en la cuantización de Eckardt son marcadamente elípticas, debemos utilizar ambos componentes de la velocidad. De acuerdo con documentos anteriores tenemos

$$v_r = \frac{\varepsilon h}{\alpha m} \text{sen}(n\theta) \quad (80)$$

$$v_\theta = \frac{h}{m r} \quad (81)$$

Mediante

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha}{r} - 1 \right), \quad (82)$$

$$\text{sen}(n\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(n\theta)} \quad (83)$$

obtenemos el módulo al cuadrado de la velocidad luego de algunos aritméticos

$$v^2 = \frac{((\varepsilon^2 - 1)r + 2\alpha)L^2}{\alpha^2 m^2 r} \quad (84)$$

La energía total es

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{L^2}{\alpha m} - k \right) + (\varepsilon^2 - 1) \frac{L^2}{2\alpha^2 m} \quad (85)$$

$$(86)$$

Esta expresión debe de ser constante, por lo tanto la dependencia respecto de r deberá desaparecer. Esto se asegura al establecer

$$L^2 = k\alpha\omega \quad (87)$$

que relaciona el momento angular con cierta semi latitud recta. Entonces la energía deviene

$$E = \frac{(E^2 - 1)k}{2\alpha} \quad (88)$$

a partir de lo cual se obtiene

$$E^2 = 1 + \frac{2E\alpha}{k} \quad (89)$$

Asombrosamente, esta es la misma expresión que la Ec.(70) ó (78), deducida a partir de la teoría de Sommerfeld. Sin embargo, la energía no está cuantificada, y α ésta cuantizada de acuerdo con la Ec.(74):

$$\alpha = \frac{r_0}{n-1}, \quad n \neq 1. \quad (90)$$

Por lo tanto, las órbitas tienen un aspecto diferente de aquellas de la teoría de Sommerfeld, y la elipticidad ε no es pequeña para $n > 1$. Las primeras cinco órbitas se representan gráficamente en la Fig. 7, y se muestran allí los valores correspondientes de ε . Comparadas con la Fig. 6, las órbitas no se encogen con n sino que conservan sus radios máximos.

La energía podría cuantizarse insertando los valores cuantizados de α en la Ec.(88), pero entonces E dependería de n en lugar de $1/n^2$, como sucede en las teorías de Bohr y Sommerfeld. Un comportamiento correcto de $E(n)$ requeriría de restricciones adicionales de cuantización para ε .

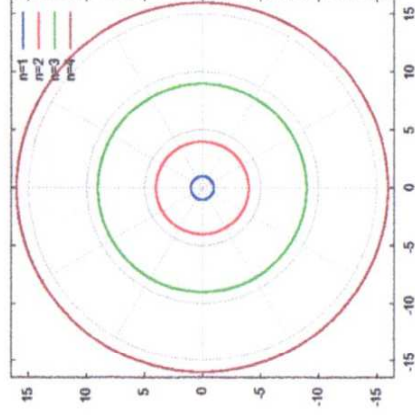


Figura 1: Radios de Bohr $r_B = n^2$ para números cuánticos n .

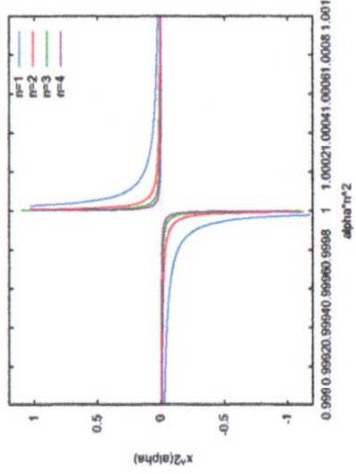


Figura 2: Factor de precesión de Sommerfeld $x^2(\alpha - n^2)$ para números cuánticos n .

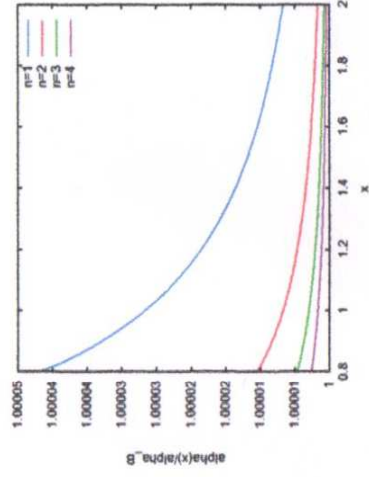


Figura 3: Semi-latitud recta normalizada $\alpha(x) = n^2$ para elipses de Sommerfeld.

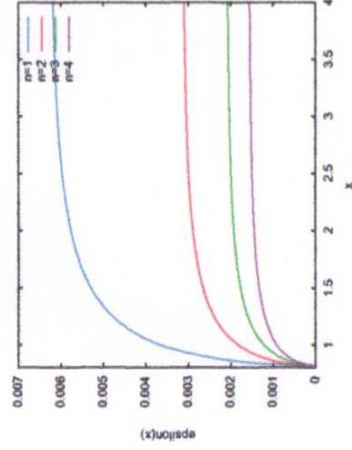


Figura 4: Elipticidad $\epsilon(x)$ para elipses de Sommerfeld.

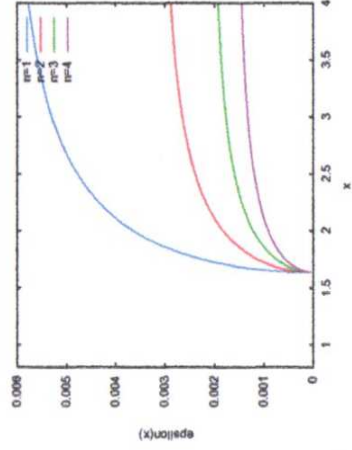


Figura 5: Elipticidad $\epsilon(x)$ para elipses de Sommerfeld con velocidad orbital incrementada artificialmente $v \rightarrow 2v$.

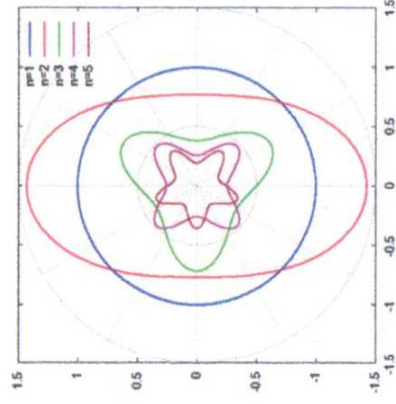


Figura 6: Orbitales de la cuantización de Eckardt con $\varepsilon = 0.3$, $r_0 = 1$.

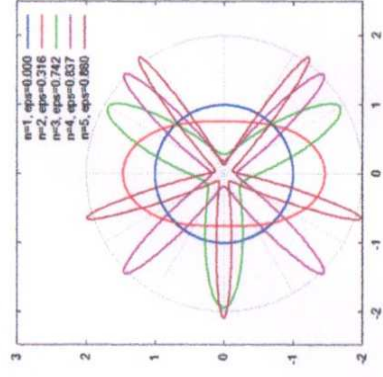


Figura 7: Orbitales de la cuantización de Eckardt con ε variable y con $r_0 = 1$, $E = -0.45$.

Agradecimientos.

Se agradece el Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y a AIAS y otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por las publicaciones en red, a Alex Hill por las traducciones y grabaciones, y a Robert Cheshire por las grabaciones.

Referencias bibliográficas.

- [1] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, "Principles of ECE Theory" (documento de libre acceso en el portal www.aias.us, format de libro y para iPad).
- [2] M. W. Evans, Ed., "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (Cambridge International, 2012, CISP, www.cisp-publishing.com).
- [3] M. W. Evans, Ed., *J. Found. Phys. Chem.*, (CISP, 2011).
- [4] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticism of the Einstein Field Equation" (CISP, 2011 y document de libre acceso en el portal www.aias.us).
- [5] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, Suffolk, 2005 a 2011), en siete volúmenes.
- [6] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis 2007, documento de libre acceso en el portal www.aias.us en idioma inglés y en traducción al idioma castellano por Alex Hill).
- [7] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, documentos y plenaria en la Academia de Ciencias de Serbia, y en otras publicaciones periódicas.
- [8] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum mechanics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).
- [9] M. W. Evans y S. Kielich, "Modern Nonlinear Optics" (Wiley Interscience, 1992, 1993, 1997, 2001), en seis volúmenes y dos ediciones.
- [10] M. W. Evans y J. - P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, Dordrecht, 1994 - 2002) en cinco volúmenes con encuadernación dura o blanda.
- [11] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics" (Harcourt, Nueva York, 1988, tercera edición).