Descripción de la interacción de órbitas de espín con la Teoría x y con la Cuantización de Eckardt.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,

Civil List, AIAS y UPITEC

(www.webarchive.org.uk, , www.aias.us, www.upitec.org, www.atomicprecision.com www.et3m.net)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se describe la interacción entre órbitas de espín y la estructura atómica fina en el hidrógeno atómico mediante la teoría x en dos o tres dimensiones, en donde la extensión de la teoría no relativista a la teoría relativista se logra mediante la transformación de la descripción elíptica de la dinámica en la teoría x a una descripción elíptica con precesión. Una descripción completamente consistente requiere un lagrangiano y hamiltoniano tridimensionales, expresados en coordenadas polares esféricas, surgiendo la mecánica cuántica relativista cuando los ángulos del sistema polar esférico se multiplican por el factor de precesión x. En la cuantización de Eckardt éste es un número entero, el número cuántico de Eckardt.

Palabras clave: teoría ECE, interacción de órbitas de espín en la teoría x, estructura fina del hidrógeno atómico.

1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1-10], se ha desarrollado la teoría x para dar una descripción consistente de fenómenos bien conocidos en todas las escalas de la física y de la química. Éstos incluyen la precesión planetaria, la desviación electromagnética debida a la gravitación, la teoría de la masa del fotón, la demora temporal gravitacional, el corrimiento al rojo por causa gravitacional, la precesión ubicua de Thomas, y las teorías de Bohr y de Sommerfeld de la mecánica cuántica. Se ha demostrado que el origen de la precesión planetaria es la precesión ubicua de Thomas, la cual se produce en todas las escalas, desde la galáctica a la atómica. Se ha demostrado que la teoría ECE, pariente de la teoría x, ofrece una descripción satisfactoria de las bases de una galaxia en espiral, en especial de su curva de velocidad y de las órbitas estelares hiperbólicas. Todo esto se ha logrado mediante una sencilla teoría elíptica. La elipse sufre precesión cuando los ángulos del sistema de coordenadas polares esféricas se multiplican por el factor de precesión x. Se ha realizado esto último en términos de la precesión ubicua de Thomas. Se define la cuantización de Eckardt para valores enteros de x, un proceso que produce una estructura ondulatoria de de Broglie superpuesta sobre la elipse. La precesión y la estructura ondulatoria son ejemplos de teoría de la sección cónica con el ángulo multiplicado por x. En documentos previos de esta serie [1-10], publicados en el portal www.aias.us, nos hemos referido a estos patrones como secciones cónicas fractales. Para valores de x cercanos a la unidad, la elipse sufre precesión, pero a medida que aumenta su valor aparecen los patrones ondulatorios. Si se define a x como el número entero n, el número de ondas superpuestas sobre la elipse será también igual a n. En el documento precedente, la teoría x se extendió a la cuantización de Schroedinger.

En la Sección 2, se aplica la teoría x para describir el acoplamiento de órbitas de espín y de la estructura fina del hidrógeno atómico (H). Debieran de leerse las notas de acompañamiento de este documento como una parte intrínseca del desarrollo de este documento. Este documento mismo (UFT268) brinda una breve descripción de los principales resultados. La primera nota de acompañamiento del documento UFT268 en el portal www.aias.us calcula los niveles de energía del átomo de hidrógeno, mediante la evaluación del valor esperado del hamiltoniano para las primeras funciones de onda hidrogénicas, utilizando cálculos manuales y álgebra computacional. Se demuestra que los valores esperados de $\cos \varphi$ y $\cos \theta$ son iguales a cero para todas las funciones de onda hidrogénicas, donde φ y θ son los ángulos del sistema de coordenadas polares esféricas. La segunda nota de acompañamiento, la 268(2), deduce la órbita elíptica a partir del hamiltoniano clásico mediante la descripción de la interacción de un electrón y un protón, utilizando coordenadas polares planas. Esto constituye una aproximación al hamiltoniano tridimensional, en el que se utilizan coordenadas polares esféricas. Se desarrolla una teoría tridimensional completamente consistente en la nota de acompañamiento 268(9), la cual se describe en la Sección 2 de este documento. Las coordenadas polares planas resultan suficientes para órbitas planetarias ubicadas en un plano, pero constituyen claramente sólo una aproximación al problema de los orbitales en el hidrógeno atómico. Los orbitales atómicos son tridimensionales y cuantizados. Las órbitas planetarias son bidimensionales, clásicas y planas. Se computan varios valores esperados para las primeras funciones de onda hidrogénicas, y los resultados se analizan en la Sección 3.

La nota de acompañamiento 268(3) inicia el desarrollo de la teoría de interacción entre órbitas de espín a partir de la teoría x aplicando inicialmente una cuantización de Schroedinger al hamiltoniano clásico y no relativista en un plano. Hay dos planos principales, definidos por los dos ángulos del sistema de coordenadas polares esféricas. Se encontró que varios valores esperados importantes dieron resultados diferentes para los dos tipos de elipse. La hipótesis básica de este documento es que la teoría cuántica relativista se define mediante una elipse con precesión, argumentando en forma análoga a la teoría atómica de Sommerfeld de 1915, la primera teoría cuántica relativista descrita en documentos UFT inmediatamente precedentes a éste. La elipse con precesión produce un operador hamiltoniano relativista que se desarrolla en esta nota de acompañamiento. En la nota de acompañamiento 268(4) se desarrollan valores esperados a partir de la ecuación del fermión [1-10], la ecuación quiral de Dirac de la teoría ECE, y se preparan para su comparación con la nota de acompañamiento 268(3). Se incluyen algunos detalles del hamiltoniano de orbital de espín y todos los detalles en la nota de acompañamiento 268(8), junto con una descripción de las aproximaciones utilizadas. La nota de acompañamiento 268(5) desarrolla aún más la teoría mediante una cuantización de tipo Bohr para el momento angular clásico. En una teoría completamente consistente, alcanzada en la nota de acompañamiento 268(9), se utiliza una cuantización de tipo Schroedinger con un hamiltoniano tridimensional expresado en coordenadas polares esféricas.

En la nota de acompañamiento 268(6) se sustituye la cuantización de Bohr por una cuantización de Schroedinger en la aproximación plana, utilizando la elipse phi (la elipse en el ángulo φ del sistema de coordenadas polares esféricas). Este modelo se compara con los resultados experimentales para la partición de órbitas de espín en orbitales p en hidrógeno atómico, y se descubre que x tiene valores cercanos a la unidad, tal como sucede en la teoría de la precesión orbital. El origen de x es la precesión ubicua de Thomas, la cual constituye por lo tanto un fenómeno universal que se produce en todas las escalas del universo. Esta teoría se describe brevemente en la Sección 2 de este documento, pero constituye todavía una primera aproximación. En la nota de acompañamiento 268(7) se desarrolla un poco más y se incluyen algunos comentarios acerca de la cuantización de Eckardt en el contexto de esta aproximación elíptica plana. Para facilidad de referencia, la nota de acompañamiento 268(8) incluye una descripción completa de la deducción del hamiltoniano de orbital de espín a partir de la ecuación del fermión, una deducción que incluye algunas primeras aproximaciones realizadas por Dirac y otros pero que da origen a un conjunto de resultados importantes, como es bien sabido. Estos incluyen el factor g del electrón sin correcciones radiativas, el factor de Landé, el semi-factor de Thomas, ESR, NMR y MRI. Finalmente, en la nota de acompañamiento 268(9) se desarrolla la teoría tridimensional completa, y se demuestra que la elipse relevante es la elipse theta, que aparece como una parte bien definida de la teoría tridimensional.

2. Desarrollo de la aproximación elíptica phi plana y la teoría tridimensional.

Tal como se describe en documentos previos acerca de la teoría x en la sección de documentos de la serie UFT en el portal www.aias.us, el hamiltoniano para la aproximación phi plana a la mecánica cuántica relativista es:

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{x^2 k}{r} + \frac{(x^2-1)L^2}{2mr^2}\right)\psi \qquad (1)$$

donde $\hbar$ es la constante reducida de Planck, m es la masa del electrón, L es el momento angular orbital, r es la distancia entre el electrón y el protón en el átomo de hidrógeno y ψ es la función de onda hidrogénicas. La constante k es:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \qquad (2)$$

donde $-e$ es la carga en el electrón y ε_0 la permitividad del vacío en unidades del S. I. La cuantización de Schroedinger:

$$L^2\psi = \ell(\ell+1)\hbar^2\psi \qquad (3)$$

se supone a priori, aun cuando para que la Ec. (1) fuese rigurosamente aplicable se requiere de una teoría tridimensional tal como se desarrolla más adelante en esta sección. Tal como se mostró con todos los detalles en la nota de acompañamiento 268(8), el hamiltoniano a partir de la ecuación del fermión [1-10] de la mecánica cuántica relativista es:

$$(E - mc^2)\psi = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \frac{k}{r} + E_{so}\right)\psi \qquad (4)$$

de manera que puede hallarse el valor de x en esta aproximación plana de phi al igualar el lado derecho de las ecuaciones (1) y (4). Resulta entonces que:

$$E_{so} = (x^2 - 1)V_{ef} \qquad (5)$$

donde V_{ef} es el conocido potencial efectivo de la ecuación de Schroedinger [1-10]:

$$V_{ef} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}. \qquad (6)$$

Esta teoría plana de phi constituye una primera aproximación, pero posee consistencia interna, porque para

$$x = 1 \qquad (7)$$

la teoría es mecánica cuántica no relativista, en la cual no hay acoplamiento de orbita de espín:

$$E_{so} = 0 \tag{8}$$

a partir de la Ec. (5). Por lo tanto, x puede calcularse a partir de:

$$\begin{aligned} \langle E_{so} \rangle &= \frac{e^2 \hbar^2}{8\pi\epsilon_0 m^2 c^2} \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \\ &= (1 - x^2) \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle - l(l+1) \frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Para consistencia interna, los valores esperados deben de calcularse numéricamente para cada función de onda hidrogénicas utilizando:

$$\left\langle \frac{1}{r^n} \right\rangle = \int \psi^* \frac{1}{r^n} \psi \, d\tau, \tag{10}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \epsilon \cos(x\theta) \right). \tag{11}$$

En estas expresiones, la semi latitud recta y la elipticidad vienen dadas por:

$$\alpha = \frac{L^2}{mk} = \frac{4\pi\epsilon_0 l(l+1)\hbar^2}{me^2} \tag{12}$$

y:

$$\epsilon^2 = 1 + 2\frac{EL^2}{mk^2} = 1 - \frac{l(l+1)}{n^2}. \tag{13}$$

Aquí, n es el número cuántico principal, y:

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{14}$$

El número cuántico j se define mediante la serie de Clebsch Gordan:

$$j = l+s, l+s-1, \ldots, |l-s| \tag{15}$$

donde s es el número cuántico de espín.

Para el orbital $2p$ de H:

$$j = 3/2 \text{ ó } j = 1/2 . \tag{16}$$

Si:

$$j = 3/2 , \ l = 1 , \ s = 1/2 \tag{17}$$

entonces

$$\langle E_{so} \rangle_{3/2} = \frac{e^2 \hbar^2}{8\pi \epsilon_0 m^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \tag{18}$$

y si:

$$j = 1/2 , \ l = 1 , \ s = 1/2 \tag{19}$$

entonces:

$$\langle E_{so} \rangle = \frac{-e^2 \hbar^2}{4\pi \epsilon_0 m^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle . \tag{20}$$

Por lo tanto, la partición observada:

$$\langle E_{so} \rangle_{3/2} - \langle E_{so} \rangle_{1/2} = \frac{3}{8\pi} \frac{e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 m^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle$$

$$= 7.25 \times 10^{-24} \ J = 0.365 \ cm^{-1} \tag{21}$$

donde:

$$(1-\chi^2)\left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle - \frac{\hbar^2}{m} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right) = 7.25 \times 10^{-24} \tag{22}$$

y:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \int \psi_{2p}^{*} \frac{1}{\alpha} \left(1+\epsilon\cos(x\psi)\right) \psi_{2p}\, d\tau \qquad (23)$$

con:

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \int \psi_{2p}^{*} \frac{1}{\alpha^2} \left(1+\epsilon\cos(x\psi)\right)^2 \psi_{2p}\, d\tau. \qquad (24)$$

La Ec. (21) se resuelve numéricamente en la Sección 3 para dar un valor de x muy cercano a la unidad. Claramente, si x fuese exactamente la unidad no habría partición de orbital de espín.

Este resultado pareciera sugerir que x es un factor ubicuo porque su orden de magnitud en precesión planetaria y en la estructura fina del hidrógeno atómico es similar. Esta conclusión es consistente con el hecho de que x se debe a la precesión ubicua de Thomas, tal como se demostró en documentos previos acerca de la teoría x. A pesar de esta conclusión con consistencia interna, sin embargo, una teoría completamente correcta debe de ser tridimensional, y la misma se desarrolla a continuación.

El hamiltoniano clásico es:

$$H = E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \qquad (25)$$

que en dos dimensiones para una órbita plana da:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha}\left(1+\epsilon\cos\psi\right) \qquad (26)$$

donde:

$$\alpha = \frac{L^2}{mk}, \quad \epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2}. \qquad (27)$$

La cuantización de Schroedinger de la Ec. (25) significa

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{k}{r}\right)\psi. \qquad (28)$$

El radio de Bohr es:

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2} \qquad (29)$$

de manera que

$$E = \langle H \rangle = -\frac{\hbar^2}{2mr_B^2} \tag{30}$$

y

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{r_B}. \tag{31}$$

La elipse φ da los valores esperados:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle 1 + \epsilon\cos\varphi \rangle = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r_B} \tag{32}$$

para todos los orbitales hidrogénicos con:

$$\langle \cos\varphi \rangle = 0 \tag{33}$$

para todos los orbitales. Por lo tanto:

$$\langle \alpha \rangle = \alpha = r_B \tag{34}$$

para todos los orbitales. A partir de las Ecs. (27) y (34):

$$\langle L^2 \rangle = mkr_B = n^2\hbar^2 \tag{35}$$

para todos los orbitales. Esto significa que:

$$\langle \epsilon^2 \rangle = 1 - \frac{k}{r_B}\frac{mkr_B}{mk^2} = 0 \tag{36}$$

en la aproximación de la elipse phi plana no relativista, el ε^2 clásico es distinto de cero en general, pero su valor esperado es cero. La elipse de phi plana es una consecuencia de la energía cinética plana, en tanto que la energía cinética tridimensional es:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \tag{37}$$

que se origina partir del hecho de que la velocidad lineal en coordenadas polares esféricas es:

$$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \tag{38}$$

De manera que el lagrangiano en tres dimensiones es:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{k}{r} \tag{39}$$

Las variables lagrangianas son r, θ y φ, y hay tres ecuaciones de Euler Lagrange.

1) La ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \tag{40}$$

da:

$$m\ddot{r} = mr\left(\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{r^2}\,. \tag{41}$$

2) La ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \tag{42}$$

da:

$$mr^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\,\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{43}$$

y el momento angular constante:

$$L_1 = mr^2\dot{\theta}. \tag{44}$$

3) La ecuación:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \tag{45}$$

da

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\theta\right) = 0 \tag{46}$$

y el momento angular constante:

$$L_2 = mr^2\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\theta. \tag{47}$$

De manera que las dos velocidades angulares son:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_1}{mr^2} \tag{48}$$

y

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_2}{mr^2\,\mathrm{sen}^2\theta} \tag{49}$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \tag{50}$$

donde el momento angular total es:

$$L^2 = L_1^2 + \frac{L_2^2}{\mathrm{sen}^2\theta} \tag{51}$$

El valor total clásico de L^2 en tres dimensiones se cuantiza como:

$$L^2\psi = \ell(\ell+1)\hbar^2\psi \tag{52}$$

como es bien sabido.

La Ec. (50) se transforma ahora en una ecuación de Binet utilizando:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} \tag{53}$$

en la que $d\theta/dt$ se define mediante la Ec.(48):

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{mr^2}{L_1} \tag{54}$$

De manera que:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{m}{L_1}\frac{dr}{dt} \tag{55}$$

y

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{m}{L_1}\frac{d}{d\theta}\frac{dr}{dt}. \tag{56}$$

Utilizamos ahora:

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{dt}{d\theta}\frac{df}{dt} \tag{57}$$

de manera que:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{m^2}{L_1^2}r^2\frac{d^2r}{dt^2} \tag{58}$$

y:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L_1^2}{mr^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{59}$$

Por lo tanto, la Ec. (41) deviene la ecuación tridimensional de Binet:

$$F = -\frac{k}{r^2} = -\frac{L_1^2}{mr^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right) - \frac{L_2^2}{mr^3 \operatorname{sen}^2\theta} \tag{60}$$

Por lo tanto, la elipse relevante es:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha_1}\left(1 + \epsilon_1 \cos\theta\right) \tag{61}$$

en la que:

$$\alpha_1 = \frac{L_1^2}{mk}, \quad \epsilon_1^2 = 1 + 2\frac{E_1 L_1^2}{mk^2} \tag{62}$$

y:

$$E_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L_1^2}{m r^3} . \tag{63}$$

El hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{r}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_1^2}{2mr^2} + \frac{L_2^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{k}{r}$$

$$= \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \tag{64}$$

y con la cuantización

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{k}{r}\psi \tag{65}$$

donde:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} . \tag{66}$$

En el átomo de hidrógeno:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\langle\nabla^2\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int \psi^* \nabla^2 \psi \, d\tau$$

$$= \frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \tag{67}$$

y los niveles de energía totales son:

$$\begin{aligned} E &= \langle H \rangle \\ &= \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle - \left\langle \frac{k}{r} \right\rangle \\ &= \frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} - \frac{me^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \end{aligned} \tag{68}$$

Con el objeto de introducir efectos relativistas, se cambia el ángulo θ a $x\theta$. La elipse (61) deviene

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha_1}\left(1 + \epsilon_1 \cos(x\theta)\right) \tag{69}$$

y los niveles de energía se cambian a:

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\langle \nabla^2 \psi \right\rangle - k\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \tag{70}$$

donde:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{\alpha_1}\left\langle 1 + \epsilon_1 \cos(x\theta) \right\rangle \tag{71}$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla^2 \psi \right\rangle &= \int \psi^* \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) d\tau \\ &+ \int \psi^* \left(\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(x\theta)} \frac{\partial}{\partial (x\theta)} \left(\operatorname{sen}(x\theta) \frac{\partial \psi}{\partial (x\theta)} \right) \right) d\tau \\ &+ \int \psi^* \left(\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(x\theta)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) d\tau \end{aligned} \tag{72}$$

en donde:

$$\int \psi^* \left(\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(x\theta)} \frac{\partial}{\partial (x\theta)} \left(\operatorname{sen}(x\theta) \frac{\partial \psi}{\partial (x\theta)} \right) \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{x^2} \int \frac{\psi^*}{r^2 \operatorname{sen}(x\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}(x\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\tau \qquad (73)$$

También es posible evaluar el efecto de x en la Ec. (67):

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{p_r^2}{2m} \right\rangle + \frac{L_1^2}{2m} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle + \frac{L_2^2}{2m} \left\langle \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right\rangle \qquad (74)$$

utilizando:

$$\theta \longrightarrow x\theta \qquad (75)$$

De manera que:

$$\left\langle \frac{p_r^2}{2m} \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^* \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) d\tau,$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^* \frac{1}{r^2} \psi \, d\tau \,, \qquad (76)$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(x\theta)} \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^* \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(x\theta)} \psi \, d\tau$$

y:

$$\left\langle \frac{k}{r} \right\rangle = k \int \psi^* \frac{1}{r} \psi \, d\tau \qquad (77)$$

Los niveles de energía hidrogénicas finales se cambian a:

$$E = \left(\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle - \left\langle \frac{k}{r} \right\rangle \right)_x \qquad (78)$$

y pueden compararse con los resultados de la estructura fina atómica tal como la interacción de órbitas de espín.

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por las publicaciones en red, a Alex Hill por las traducciones y grabaciones, y a Robert Cheshire por las grabaciones.

Referencias bibliográficas

[1] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, "Principles of ECE Theory", (de acceso libre en el portal www.aias.us y en formato de libro).

[2] M. W. Evans, "Definitive Refutations of Einsteinian General Relativity" (Cambridge International Science Publishing, CISP, 2012).

[3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP, 2011).

[4] M .W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, documentos y plenarias en publicaciones periódicas, incluyendo la Academia de Ciencias de Serbia.

[5] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2005 a 2011, de libre acceso en el portal www.aias.us) en siete volúmenes.

[6] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2007 y de libre acceso en el portal www.aias.us). Existe traducción al castellano por Alex Hill, de acceso libre en el portal www.aias.us .

[7] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the $B^{(3)}$ Field" (World Scientific, 2001).

[8] M .W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001) en dos ediciones y seis volúmenes.

[9] M .W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, Dordrecht, 1994 a 2002) en cinco volúmenes, con encuadernación dura y blanda.

[10] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagneton in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).