

# Órbitas tridimensionales a partir de la Teoría ECE

por

M. W. Evans y H. Eckardt,  
Civil List, AIAS y UPITEC

([www.webarchive.org.uk](http://www.webarchive.org.uk), [www.aias.us](http://www.aias.us), [www.upitec.org](http://www.upitec.org), [www.atomicprecision.com](http://www.atomicprecision.com)  
[www.et3m.net](http://www.et3m.net)).

Traducción: Alex Hill ([www.et3m.net](http://www.et3m.net))

## Resumen.

Se analiza mediante coordenadas polares esféricas la órbita tridimensional a partir de la ley de atracción del cuadrado de la inversa. Se demuestra que la solución general es la elipse Beta, la cual es equivalente a una elipse con precesión en los ángulos  $\varphi$  y  $\theta$  de las coordenadas polares esféricas. Las órbitas resultantes se representan gráficamente en representación polar esférica y mediante ecuaciones dadas para su animación. En general, la órbita de una masa  $m$  atraída a una masa  $M$  a través de una ley del cuadrado de la inversa es tridimensional. La teoría también aplica sin cambio alguno a la órbita clásica tridimensional de un electrón alrededor de un protón. Esto se cuantiza en los conocidos orbitales de la mecánica cuántica. La cuantización de Eckardt se lleva a cabo cuando la constante de precesión es un número entero. Esta teoría producen secciones cónicas fractales tridimensionales en el campo de las matemáticas.

*Palabras clave:* teoría ECE, órbitas, gráficas y animación tridimensionales.

## 1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1-10] se ha desarrollado la teoría  $x$  a partir de la teoría ECE, y se le ha aplicado de una manera consistente a varios fenómenos. Hasta la fecha, la teoría  $x$  se ha desarrollado en términos de elipses planas, y se ha obtenido una gran cantidad de información novedosa. Sin embargo, en general, la órbita debida a la ley de atracción del cuadrado de la inversa es tridimensional. No existe razón alguna por la que una órbita debiera de ser plana, y las órbitas planas evolucionan a partir de tempranas órbitas tridimensionales. En la Sección 2 se utilizan coordenadas polares esféricas con el objeto de analizar las órbitas tridimensionales y desarrollar la teoría. Los momentos angulares se evalúan a partir de primeros principios básicos de la geometría, siendo las coordenadas polares esféricas un caso especial de la geometría de Cartan sobre la cual se basa directamente la teoría ECE. Este procedimiento define los componentes del momento angular. Se utiliza un análisis lagrangiano para encontrar las constantes de movimiento del sistema en términos de los momentos angulares, y se muestra que la solución general es una elipse Beta, donde Beta se define en términos de los ángulos  $\varphi$  y  $\theta$  del sistema de coordenadas polares esféricas. Se demuestra que la elipse Beta es un equivalente precisa de las elipses con precesión en los dos ángulos polares. En la Sección 3 se representan gráficamente las órbitas como gráficas polares esféricas. Se analizan otras dos soluciones en términos del componente  $Z$  de hamiltoniano y el componente del hamiltoniano definido por  $L^2 - L_z^2$ , donde  $L$  es el momento angular total y  $L_z$  es su componente según el eje  $Z$ . Como es bien sabido, estos son los componentes utilizados en mecánica cuántica. Estas órbitas también se representan gráficamente y se analizan en la Sección 3. En general, las elipses tridimensionales con precesión evolucionan hacia secciones cónicas fractales tridimensionales con muchas propiedades interesantes. Este formalismo es fundamental, de manera que resulta aplicable a través de toda la matemática, la física y la astronomía. Caracteriza órbitas tridimensionales en general. Se incluyen ecuaciones para la evolución temporal de la órbita tridimensional, en preparación para su animación. La animación brindaría la trayectoria en tres dimensiones para  $m$  alrededor de  $M$  gobernada por la ley de atracción del cuadrado de la inversa. La misma teoría aplica exactamente al análisis clásico de movimiento tridimensional de un electrón alrededor de un protón atraído por la ley de atracción de Coulomb del cuadrado de la inversa. Como es bien sabido, este movimiento clásico tridimensional se cuantiza en orbitales. Las órbitas de Eckardt se definen cuando las constantes de precesión son números enteros, y en la Sección 3 también se representa gráficamente este tipo de órbita. La cuantización bidimensional de Eckardt conduce a una elipse con una estructura ondulatoria de Broglie sobreimpuesta, similar a la cuantización de Bohr.

## 2. Solución para órbitas tridimensionales.

Consideremos el vector de momento angular en tres dimensiones [11,12]:

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

donde  $\underline{r}$  es el vector de posición y  $\underline{p}$  el vector de momento lineal. El vector de momento lineal se conserva.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}.$$

(2)

En coordenadas polares esféricas [11]:

$$\underline{r} = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \underline{i} + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \underline{j} + r \cos \theta \underline{k}$$

(3)

$$\begin{aligned} \underline{p} = m \left( \dot{r} \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \dot{\phi} \right) \underline{i} \\ + \left( \dot{r} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi \dot{\theta} + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \dot{\phi} \right) \underline{j} \\ + \left( \dot{r} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \right) \underline{k} \end{aligned}$$

(4)

Por lo tanto, los componentes cartesianos del momento angular son:

$$L_x = -m r^2 \left( \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \phi \right)$$

(5)

$$L_y = m r^2 \left( \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \phi \right)$$

(6)

$$L_z = m r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}$$

(7)

Cada componente cartesiano se conserva y es una constante de movimiento:

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{dL_y}{dt} = \frac{dL_z}{dt} = 0.$$

(8)

El momento angular total es:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = m^2 r^4 \left( \dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2 \right)$$

(9)

en donde:

$$\begin{aligned} L^2 &= m^2 r^4 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^4 \theta \dot{\phi}^2 \right) \\ &= m^2 r^4 \left( \dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \end{aligned}$$

(10)

y:

$$\begin{aligned}
 L_x^2 + L_y^2 &= L^2 - L_z^2 \\
 &= m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

y éstos también se conservan.

El hamiltoniano es:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)) - \frac{k}{r} \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

y el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)) + \frac{k}{r}
 \tag{13}$$

El ángulo Beta se define mediante:

$$\dot{\vartheta}^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta
 \tag{14}$$

de manera que el hamiltoniano deviene:

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) - \frac{k}{r}
 \tag{15}$$

La solución de la Ec. (15) es la función tridimensional [1-10,12]:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \vartheta}
 \tag{16}$$

la cual tiene la estructura de una elipse o sección cónica en general [12]. La semi latitud recta y la elipticidad también son funciones tridimensionales definidas por

$$\alpha = \frac{L^2}{mk}, \quad \epsilon^2 = 1 + 2 \frac{E L^2}{mk^2}
 \tag{17}$$

En movimiento planetario de una masa  $m$  alrededor de una masa  $M$  la constante  $k$  se define mediante:

(18)

$$k = mMG$$

donde  $G$  es la constante de Newton. En dinámica de Coulomb:

(19)

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

donde  $e$  es la carga del protón y  $\epsilon_0$  la permitividad en el vacío. La energía total  $E$  se define experimentalmente a través del semieje mayor de la elipse tridimensional:

(20)

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{k}{2E}$$

La ecuación de Binet de la elipse Beta es [1-10,12]:

(21)

$$F = -\frac{L^2}{mr^2} \left( \frac{d^2}{d\phi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right).$$

Para una ley de atracción del cuadrado de la inversa:

(22)

$$F = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{k}{r^2}$$

de manera que, para una elipse:

(23)

$$F = -\frac{L^2}{m\alpha r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

en forma consistente. Para una elipse Beta con precesión:

(24)

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\chi\phi)}$$

y la ley de fuerza a partir de la ecuación de Binet deviene:

(25)

$$F = -\frac{\chi^2 k}{r^2} + (\chi^2 - 1) \frac{L^2}{mr^3}$$

dando el potencial:

(26)

$$V = -\frac{\chi^2 k}{r^2} + (\chi^2 - 1) \frac{L^2}{2mr^2}$$

El hamiltoniano sufre un cambio a partir de:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (27)$$

a:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \tilde{\lambda} \frac{k}{r} + (\tilde{\lambda}^2 - 1) \frac{L^2}{2m r^2} \quad (28)$$

Al efectuar la cuantización, los niveles de energía del átomo de H cambian a:

$$E = \langle H \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle - \tilde{\lambda}^2 \left\langle \frac{k}{r} \right\rangle + (\tilde{\lambda}^2 - 1) \left\langle \frac{L^2}{r^2} \right\rangle \quad (29)$$

donde los valores esperados son:

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 a} \quad (30)$$

$$\left\langle \frac{k}{r} \right\rangle = - \frac{m e^4}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 a} \quad (31)$$

$$\langle L^2 \rangle = l(l+1) \hbar^2 \quad (32)$$

De manera que los nuevos niveles de energía son:

$$E = \frac{(1 - 2\tilde{\lambda}^2) m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 a} + (\tilde{\lambda}^2 - 1) \frac{\hbar^2}{2m} l(l+1) \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \quad (33)$$

Tal como se describe en detalle en la nota de acompañamiento 269(3), el factor  $x$  puede definirse como sigue mediante su comparación con la órbita de espín de acoplamiento del hamiltoniano de la ecuación del fermión:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\lambda}^2 - 1) \left( \frac{m e^4}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 a} + l(l+1) \frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{e^2 \hbar^2}{16 \pi \epsilon_0 m^2 c^2 r_{0B}} \left( \frac{l(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{\hbar^2 l(l + \frac{1}{2})(l+1)} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

donde:

$$r_{0B} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \quad (35)$$

Aquí,  $n$  es el número cuántico principal,  $j$  es el número cuántico del momento angular total:

$$j = l + s, l + s - 1, \dots, |l - s| \quad (36)$$

y  $s$  es el número cuántico de espín.

El lagrangiano de Beta clásico es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2) + \frac{k}{r}. \quad (37)$$

La ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) = 0 \quad (38)$$

da el momento angular clásico total que se conserva

$$L = m r^2 \dot{\beta} \quad (39)$$

de manera que:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{L}{m r^2} = \frac{L}{m \alpha^2} (1 + \epsilon \cos \beta)^2 \quad (40)$$

$$y \quad t = \frac{m \alpha^2}{L} \int \frac{d\beta}{(1 + \epsilon \cos \beta)^2}. \quad (41)$$

Esta ecuación puede animarse para dar la trayectoria  $r$  ó Beta como una función del tiempo. La integral es de resolución analítica y se obtiene por álgebra computacional o a través de las expresiones incluidas en las notas de acompañamiento 269(6) y 269(7).

La ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad (42)$$

da

$$m r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi}) \quad (43)$$

de manera que:

$$L^2 = L_{\phi}^2 + m r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \quad (44)$$

donde

$$L_{\phi} = m r^2 \dot{\phi} \sin \theta. \quad (45)$$

Estos resultados son los mismos que aquellos dados previamente en esta sección a partir de fundamentos básicos de la geometría. De manera que el análisis es correcto y posee consistencia interna.

Se deduce entonces que:

$$\frac{dL_{\phi}}{dt} = \frac{L_{\phi}}{m r^2} \quad (46)$$

y:

$$\frac{d\beta}{d\phi} = \frac{L_{\phi}}{L_{\phi}} \sin^2 \theta. \quad (47)$$

De manera que:

$$\beta = \frac{L_{\phi}}{L_{\phi}} \phi \sin^2 \theta \quad (48)$$

y se logra la integración de la Ec. (14). Llegamos al extraordinario resultado de que la elipse Beta es precisamente equivalente a elipses con precesión en  $\phi$ :



$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\left(\frac{r}{L_\varphi} \sin^2 \theta\right)} = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \beta} \quad (49)$$

Por lo tanto, en general, las órbitas tridimensionales muestran precesión en un nivel clásico no relativista. Los elipses de Eckardt se definen mediante:

$$\frac{L}{L_\varphi} \sin^2 \theta = n = 1, 2, \dots \quad (50)$$

Las trayectorias de las órbitas tridimensionales vienen dadas por:

$$t = \frac{m\alpha^2}{L} \int \frac{d\beta}{(1 + \epsilon \cos \beta)^2} \quad (51)$$

es decir:

$$L = m r^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)^{1/2} = \text{constante} \quad (52)$$

y

$$t = \frac{m\alpha^2}{L} \int \frac{d\varphi}{\left( 1 + \epsilon \cos\left(\frac{L}{L_\varphi} \sin^2 \theta\right) \right)^2} \quad (53)$$

y las trayectorias pueden animarse como funciones de las constantes:

$$L \quad \text{y} \quad L_\varphi = L_z \quad (54)$$

definidas por:

$$L^2 = L_\theta^2 + L_\varphi^2 = L_z^2 + L_z^2 \quad (55)$$

Lo anterior es una solución completa para cualquier órbita tridimensional, y se produce una reducción a una órbita bidimensional cuando:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad / \quad L_\theta = 0. \quad (56)$$

También es posible representar gráficamente las órbitas y propiedades asociadas con la componente Z del momento angular:

$$L_z = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \quad (57)$$

cuyo hamiltoniano es:

$$H_z = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{k}{r} \quad (58)$$

La solución de este hamiltoniano es:

$$r = \frac{\alpha_1}{1 + \epsilon_1 \cos \varphi} \quad (59)$$

donde:

$$\alpha_1 = \frac{L_z^2}{m k} = \frac{L_z^2}{m k \sin^4 \theta} \quad (60)$$

y:

$$\epsilon_1^2 = 1 + 2 \frac{E L_z^2}{m k^2} = 1 + \frac{2 E L_z^2}{m k^2 \sin^4 \theta} \quad (61)$$

Este tipo de elipse, y sus funciones asociadas, también se representan gráficamente en la Sección 3.

Puede analizarse también un tercer tipo de elipse utilizando el resultado a partir de la geometría fundamental:

$$L_z^2 = m^2 r^4 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \sin^4 \theta \right) \quad (62)$$

de manera que:

$$L_x^2 + L_y^2 = L_z^2 = m^2 r^4 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right). \quad (63)$$

Utilizando:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{m r^2 \sin^2 \theta} \quad (64)$$

se encuentra que:

$$L_x^2 + L_y^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + L_z^2 \cot^2 \theta \quad (65)$$

El hamiltoniano completo:

$$H = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L_z^2}{2 m r^2} - \frac{k}{r} \quad (66)$$

se expresa como:

$$H = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L_z^2}{2 m r^2} + \frac{L^2 - L_z^2}{2 m r^2} - \frac{k}{r} \quad (67)$$

y puede analizarse en términos de  $L_x^2$  y  $L_z^2 - L_z^2$ . El hamiltoniano

$$H_1 = H_z = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L_z^2}{2 m r^2} - \frac{k}{r} \quad (68)$$

ya se ha analizado. El hamiltoniano de tipo dos es:

$$H_2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2 - L_z^2}{2 m r^2} - \frac{k}{r} \quad (69)$$

donde:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(L^2 - L_z^2)^{1/2}}{m r^2} \quad (70)$$

y la elipse de tipo dos es:

$$r = \frac{\alpha_2}{1 + \epsilon_2 \cos \theta} \quad (71)$$

donde:

$$\alpha_2 = \frac{1}{m k} (L^2 - L_z^2 (1 + \cot^2 \theta)) \quad (72)$$

y

$$\epsilon_z^2 = 1 + \frac{2E}{mk^2} \left( L^2 - l_z^2 (1 + \cot^2 \theta) \right).$$

(73)

Estas funciones también se representan gráficamente y se analizan en la Sección 3.

En conclusión, el análisis de órbitas tridimensionales revela una estructura mucho más rica que la obtenida del análisis de órbitas tridimensionales con la misma ley del cuadrado de la inversa, y esto abre nuevos temas de investigación en los campos de la matemática, física y astronomía, tanto en mecánica clásica como cuántica, y tanto en teoría relativista como no relativista.

### 3. Análisis gráfico.

El análisis de órbitas elípticas tridimensionales comienza con la elipse  $\beta$  representando el hamiltoniano (15). El momento angular viene dado por  $L^2$  y  $L_\varphi$  como constantes de movimiento, y las coordenadas angulares se acoplan a través de la Ec.(48). Con la coordenada  $\theta$  dada obtenemos

$$\rho = \frac{L^2}{L_\varphi} \varphi \sin^2(\theta).$$

(74)

Ésto define la superficie elíptica

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\left(\frac{L_\varphi}{L} \varphi \sin^2 \theta\right)}$$

(75)

Los parámetros utilizados para las gráficas son

$$\alpha = 1,$$

(76)

$$\epsilon = 0.5,$$

(77)

$$L_\varphi = 3, \quad L = 0.5$$

(78)

$$L = 3.$$

(79)

La Fig. 1 muestra la superficie orbital elíptica para  $L_\varphi = 3$ . El elipsoide está abierto en uno de sus lados, y las órbitas no están cerradas. Se representa la misma gráfica en la Fig. 2 con  $L_\varphi = 0.5$ . Ahora, la relación  $L/L_\varphi$  es mayor, y las órbitas están mucho más estructuradas a una especie de espiral tridimensional.

Para la cuantización de Eckardt, el factor  $x$  en

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \chi} \quad (80)$$

debe ser constante y entero, lo cual conduce a la condición

$$\chi = \frac{L}{L - \varphi} \sin^2 \varphi = n = \text{constante.} \quad (81)$$

ó

$$\varphi = a \sin \left( \sqrt{\frac{L - \varphi}{L}} x \right). \quad (82)$$

La superficie orbital para  $x = 3$  se representa gráficamente en la Fig.3. De acuerdo con la cuantización de Eckardt, posee una simetría triple, la cual puede apreciarse mejor cuando la superficie se proyecta sobre el plano XY (Fig.4). Esto es una extensión tridimensional de la órbita triple en las Figs. 6 y 7 del documento UFT 266.

El hamiltoniano de  $L_z$  (Ec. 58) conduce a los parámetros de elipse dependientes de ángulo  $\epsilon_1$  y  $\alpha_1$ , dados por las Ecs.(59-61). Para una elipse se requiere que la excentricidad se encuentre en el rango  $\epsilon_1 \geq 0$  y  $\epsilon_1 < 1$ . Para la primera condición, obtenemos a partir de la Ec. (61):

$$\frac{2 L_z^2 E}{k^2 m \epsilon_1^4 \varphi} + 1 \geq 0 \quad (83)$$

la cual puede re-expresarse como

$$\sin^4 \varphi \geq - \frac{2 L_z^2 E}{k^2 m}. \quad (84)$$

La energía  $E$  debe ser negativa. La condición (84) define un ángulo mínimo  $\theta$  que se demuestra en la Fig. 5. Vemos que para los parámetros dados

$$L = 4,$$

$$L_z = 1,$$

$$E = -0.05$$

$$k = m = 1$$

(85)

(86)

(87)

(88)

$\theta$  no está definida por debajo de 0.60 ni por encima de 2.54, lo cual significa que la órbita se encuentra restringida a un rango de valores angulares de  $\theta$ . Esto puede observarse directamente a partir de la función elíptica

$$r_1 = \frac{a_1}{1 + \epsilon_1 \cos \theta} \quad (89)$$

que se representa en la Fig. 5 para  $\varphi = 0$ . La superficie  $\epsilon_1$  es un toroide (Fig. 6), pero no es suave en el origen, tal como se observa en la Fig. 7, donde sólo se muestra una cuarta parte del círculo de la coordenada  $\varphi$ . La función  $a_1$  se representa gráficamente en la Fig. 8. Es un cono doble con un agujero en el centro. La superficie total  $r_1(\theta, \varphi)$  es un elipsoide combinado con un cono doble en un lado (Fig. 9).

Las terceras órbitas de momento angular son para  $L^2 - L_Z^2 = L_X^2 + L_Y^2$ . Esto da una superficie  $\theta$  con las variables  $\epsilon_2$  y  $a_2$  (Ecs. (71-73) igual que antes). Las dos condiciones  $\epsilon_1 \geq 0$  y  $\epsilon_1 < 1$  ahora producen las restricciones

$$\theta \geq \arccot \left( \frac{\sqrt{L - L_Z} \sqrt{L + L_Z}}{L_Z} \right) \quad (90)$$

y

$$\theta < \arccot \left( \frac{1}{\sqrt{2} L_Z} \sqrt{2L^2 - 2L_Z^2 + \frac{K^2 \mu}{E}} \right) \quad (91)$$

El rango es relativamente pequeño para los parámetros dados en las ecuaciones (85-88), tal como puede observarse en la Fig. 10, donde se representan  $\epsilon_2(\theta)$  y  $r_2(\theta)$  para  $\varphi = 0$  (cf. Fig. 5). A partir de las Figs. 11-13 resulta obvio que el pequeño rango de  $\theta$  da estructuras planas con rotación simétrica para  $\epsilon_2$ ,  $a_2$  y  $r_2(\theta, \varphi)$ .

Finalmente, investigamos la función tiempo  $t(\theta, \varphi)$  tal como se obtiene a partir de las Ecs. (51-53). Seleccionando la representación de  $\varphi$ , esta integral adopta la forma

$$t = \frac{\mu \alpha^2}{L} \int \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} = \frac{\mu \alpha^2}{L \alpha^2} \int \frac{d\varphi'}{(1 + \epsilon \cos \varphi')^2} \quad (92)$$

con

$$\varphi' = \alpha \varphi = \frac{L - \mu}{L} \sin^2 \theta \varphi. \quad (93)$$

La integral puede resolverse analíticamente, obteniéndose

$$t = \frac{u \alpha^2}{L \gamma} \left\{ \frac{\epsilon \sin \varphi'}{(e^2 - 1)(\epsilon \cos \varphi' + 1)} - \frac{z \operatorname{atan} \left( \frac{(1 - \epsilon) \tan(\frac{\varphi'}{2})}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right)}{\sqrt{1 - \epsilon^2} (\epsilon^2 - 1)} \right\} \quad (94)$$

El resultado se representa gráficamente en la Fig. 14, para  $L = 3$ ,  $x = 1.1$ . Para  $\varphi = x \pi$  se produce un salto en la escala temporal debido a los valores principales de las funciones trigonométricas. La curva inversa  $\varphi(t)$  muestra el comportamiento típico de la dinámica elíptica: la velocidad de la masa en órbita alcanza los valores mínimo y máximo típicos cerca de los puntos focales, para  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi$ .

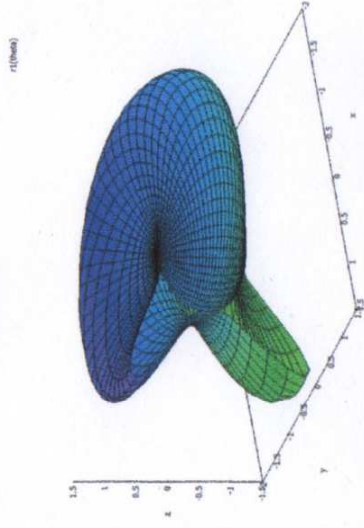


Figura 1: superficie orbital para  $L = 3$ ,  $L_\varphi = 3$ .

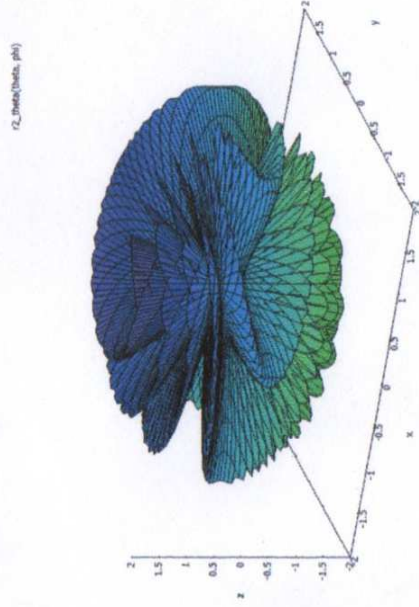


Figura 2: superficie orbital para  $L = 3$ ,  $L_\varphi = 0.5$ .

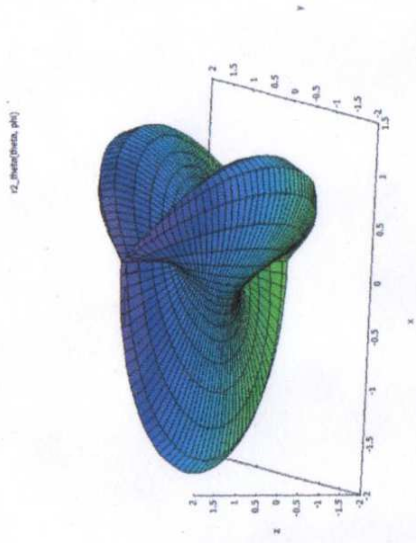


Figura 3: superficie orbital para la cuantización de Eckardt,  $x = 3$ .

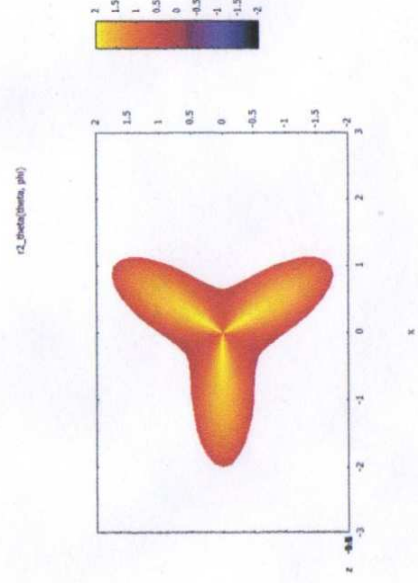


Figura 4: proyección sobre el plano  $XY$  de la superficie orbital para la cuantización de Eckardt,  $x = 3$ .

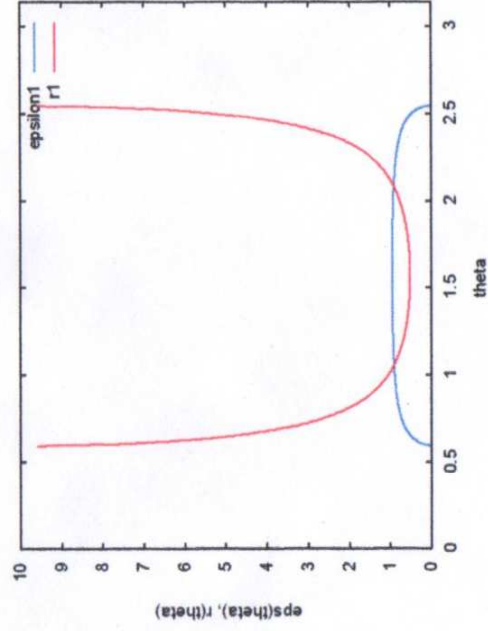


Figura 5: restricción de ángulo  $\theta$  para  $L_e$ :  $\epsilon_1(\theta)$  y  $r_1(\theta)$  para  $\varphi = 0$ .



epdfont

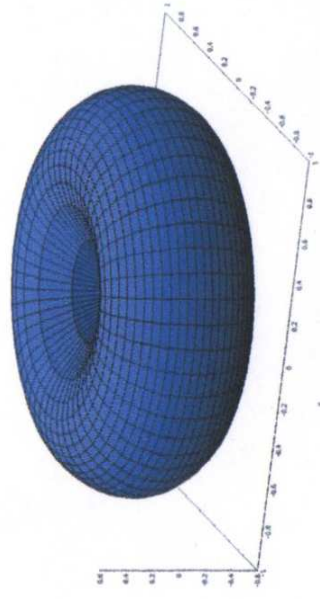


Figura 6: toroide de  $\varepsilon$ , para  $L_z$ .

epdfont

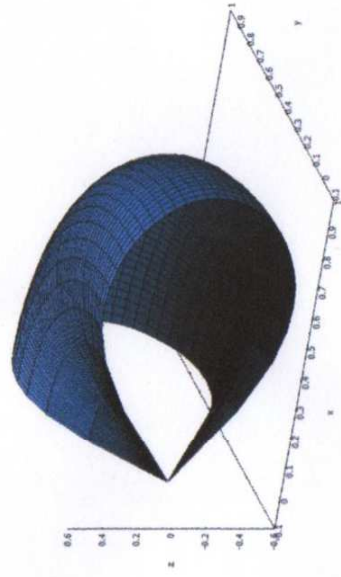


Figura 7: toroide de  $\varepsilon$ , para  $L_z$ , giro de un cuarto de vuelta de  $\varphi$ .

epdfont

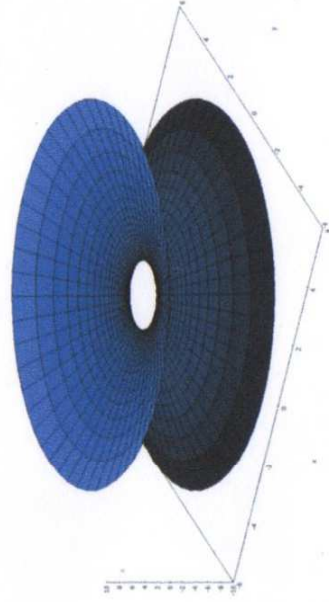


Figura 8:  $\alpha$ , para  $L_z$ .

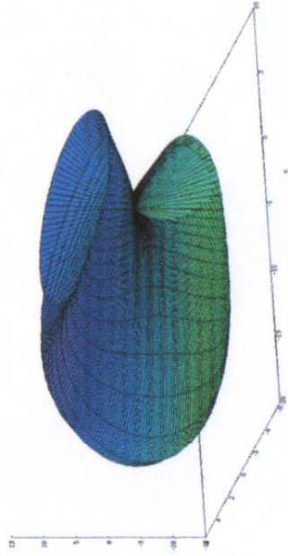


Figura 9: órbita de  $\varphi$  para  $L_z$ .

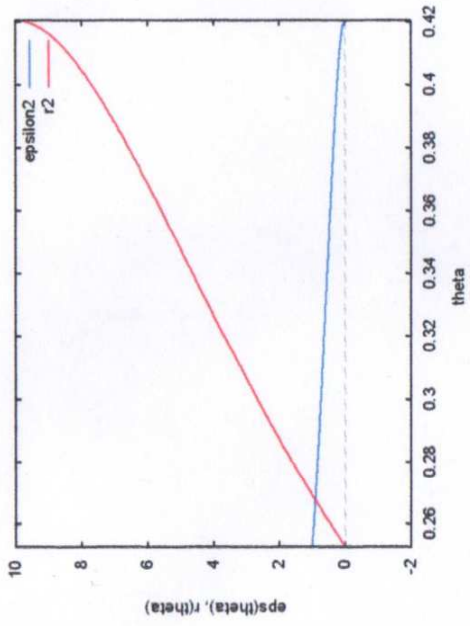


Figura 10: restricción del ángulo  $\theta$  para  $L^2 - L_z^2$ :  $\epsilon_2(\theta)$  y  $r_2(\theta)$  para  $\varphi = 0$ .

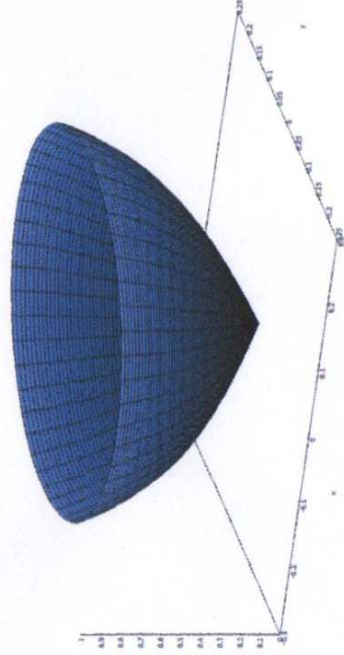


Figura 11: superficie de  $\epsilon_2$  para  $L^2 - L_z^2$ .

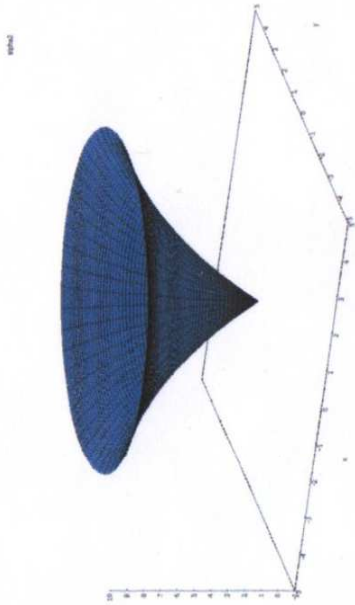


Figura 12:  $\alpha_2$  para  $L^2 - L_z^2$ .

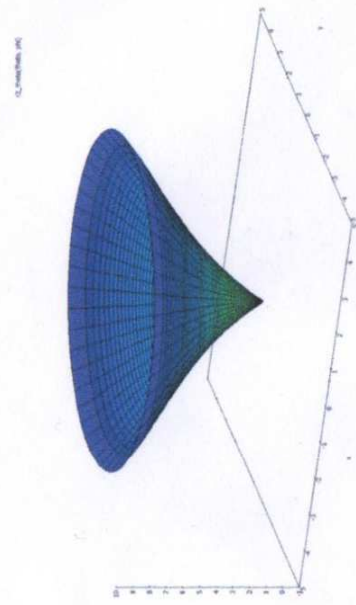


Figura 13: órbita de  $\theta$  para  $L^2 - L_z^2$ .

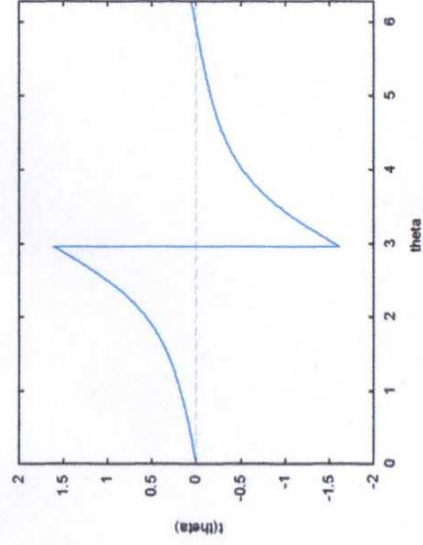


Figura 14: evolución temporal de la órbita  $\theta$ .

## Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS y a otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por su publicación en red, a Alex Hill por las traducciones, y a Robert Cheshire y Alex Hill por las grabaciones.

## Referencias bibliográficas.

- [1] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, "Principles of ECE Theory" (de libre acceso en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) y en formato de libro y de iPod).
- [2] M. W. Evans, (Ed.), "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (CISP, 2012 y de libre acceso en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us)).
- [3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (de libre acceso en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us) y en CISP, 2011).
- [4] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic 2005 a 2011) en siete volúmenes.
- [5] L. Felker "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis Academic 2007, de libre acceso en el portal [www.aias.us](http://www.aias.us), y en la traducción al español por Alex Hill en el mismo portal).
- [6] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B<sup>(3)</sup> Field" (World Scientific, 2001).
- [7] M. W. Evans y S. Kielich Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001, con encuadernación dura y blanda y en formato de libro electrónico) en seis volúmenes y dos ediciones.
- [8] M. W. Evans y J.-P. Vigié, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 - 2002, con encuadernación dura y blanda) en cinco volúmenes.
- [9] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagnetron in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).
- [10] M. W. Evans, "The Photon's Magnetic Field" (World Scientific, 1992).
- [11] E. J. Milewski, Ed. "The Vector Analysis Problem Solver" (Research and Education Association, Nueva York, 1987).
- [12] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics" (Harcourt, Nueva York, 1988, tercera edición).