

La Teoría de las Órbitas en Coordenadas Polares Esféricas.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,

Civil List, AIAS y UPITEC

(www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.et3m.net, www.upitec.org,
www.webarchive.org.uk)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se desarrolla la teoría de órbitas utilizando coordenadas polares esféricas y la ley de atracción del cuadrado de la inversa. En general, la órbita es tridimensional y hay varias constantes de movimiento definidas por el momento angular total en tres dimensiones y por componentes. La órbita es una función intrincada de las coordenadas en el sistema de coordenadas polares esféricas, y no está confinada a un plano perpendicular al eje de un momento angular, tal como sucede en el caso de coordenadas polares planas. En general hay varios tipos de aceleraciones de Coriolis y centrípetas. Se utiliza un análisis hamiltoniano y lagrangiano para desarrollar la teoría.

Palabras clave: teoría ECE, coordenadas polares esféricas, órbitas tridimensionales.

1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1-10] se han analizado varios fenómenos fundamentales en términos de una sección cónica bidimensional, en especial la elipse o elipse con precesión. En este documento se desarrolla la dinámica de la ley de atracción del cuadrado de la inversa mediante coordenadas polares esféricas, produciendo el resultado original de que las órbitas en general son tridimensionales, en lugar de secciones cónicas en un plano. Esta conclusión es el resultado directo de la unión de dos conceptos fundamentales: la ley de atracción del cuadrado de la inversa y las coordenadas polares esféricas, de manera que los resultados son matemáticamente irrefutables. Cuando ello es posible, dichos resultados se verifican mediante álgebra computacional. En la Sección 2, la órbita se desarrolla en forma rigurosa sin incluir aproximaciones, y las diversas interrelaciones entre ángulos se obtienen mediante integración utilizando álgebra computacional. Conceptos fundamentales pertenecientes a las coordenadas polares esféricas contienen muchos más términos que en la dinámica newtoniana no inercial, y también más términos que la dinámica desarrollada mediante coordenadas polares planas. En la Sección 3, se representan gráficamente los principales resultados en tres dimensiones, así como su animación. Se incluye un análisis de las principales características de las gráficas. Como de costumbre, este documento debieran de leerse acompañado de las notas de acompañamiento del documento UFT270 publicadas en el portal www.aias.us.

2. Teoría orbital.

Consideremos el hamiltoniano

$$H = E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} \quad (1)$$

en coordenadas polares esféricas. En teoría gravitacional, m es una masa que orbita alrededor de una masa M , y r es la distancia entre m y M . La constante k es mMG , donde G es la constante de Newton. Sin embargo, la misma teoría aplica a un electrón que orbita alrededor de un protón en el nivel clásico, en tanto y en cuanto se desprece los efectos de radiación. En este caso:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2)$$

donde e es la carga del protón y ϵ_0 es la permitividad en el vacío. Los principales nuevos desarrollos incluidos en este documento aplican tanto a la teoría orbital como a la electrodinámica clásica. Cuando se cuantiza la ecuación (1), produce los orbitales hidrogenicos, como es bien sabido. Los orbitales son funciones tridimensionales intrincadas definidas por un producto de las funciones radiales y los armónicos esféricos. Por lo tanto, la totalidad de la mecánica cuántica se basa en el empleo del laplaciano en coordenadas polares esféricas. Curiosamente, la teoría de las órbitas por otro lado se ha visto confinada durante más de 400 años a las coordenadas polares planas, perdiéndose así una gran cantidad de información.

En coordenadas polares esféricas [11,12], el vector posición se define mediante:

$$\underline{r} = r \underline{e}_r \quad (3)$$

y los vectores unitarios [11] mediante:

$$\underline{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \underline{i} + \sin\theta \sin\varphi \underline{j} + \cos\theta \underline{k} \quad (4)$$

$$\underline{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \underline{i} + \cos\theta \sin\varphi \underline{j} - \sin\theta \underline{k} \quad (5)$$

$$\underline{e}_\varphi = -\sin\varphi \underline{i} + \cos\varphi \underline{j} \quad (6)$$

en términos de los vectores unitarios cartesianos existe una relación simétrica cíclica entre los vectores unitarios:

$$\underline{e}_\varphi \times \underline{e}_r = \underline{e}_\theta \quad (7)$$

$$\underline{e}_\theta \times \underline{e}_\varphi = \underline{e}_r \quad (8)$$

$$\underline{e}_r \times \underline{e}_\theta = \underline{e}_\varphi \quad (9)$$

La velocidad lineal es [11,12]:

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin\theta \underline{e}_\varphi \quad (10)$$

de manera que \underline{r} y \underline{v} no son coplanares como es el caso en coordenadas polares planas. El momento angular es:

$$\begin{aligned} \underline{L} &= m \underline{r} \times \underline{v} \\ &= m r^2 \dot{\theta} \underline{e}_\varphi - m r^2 \dot{\varphi} \sin\theta \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (11)$$

y posee dos componentes. En coordenadas polares planas sólo tiene un componente. Utilizando las Ecs. (11) en las Ecs. (4-6) se vuelve claro que el momento angular tiene tres componentes cartesianas:

$$L_x = -m r^2 (\dot{\theta} \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi) \quad (12)$$

$$L_y = m r^2 (\dot{\theta} \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi) \quad (13)$$

$$L_z = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta. \quad (14)$$

Este resultado es el mismo que el obtenido en el documento UFT269 en una forma diferente. En teoría orbital plana, hay sólo un componente del momento angular, habitualmente denominado:

$$\underline{L} = L_z \underline{k} \quad (15)$$

Sin embargo, en coordenadas polares esféricas:

$$\underline{L} = L_x \underline{i} + L_y \underline{j} + L_z \underline{k} \quad (16)$$

y la conservación del momento angular significa que \underline{L} y sus tres componentes cartesianas son todos constantes de movimiento:

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{dL_y}{dt} = \frac{dL_z}{dt} = 0. \quad (17)$$

La fuerza en coordenadas polares esféricas es [11]:

$$\underline{F} = m \underline{a} = m(a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi) \quad (18)$$

donde:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta \dot{\varphi}^2 \quad (19)$$

$$a_\theta = 2r\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi} - r\sin\theta\cos\theta \dot{\varphi}^2 \quad (20)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\sin\theta\ddot{\varphi} \quad (21)$$

y contiene muchos términos que no están presentes en las coordenadas polares planas o en un desarrollo newtoniano no inercial. Estos términos son desarrollos de las fuerzas de Coriolis y centrífugas de las órbitas planas.

El cuadrado de la velocidad es:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta \dot{\varphi}^2 \quad (22)$$

de manera que el hamiltoniano es:

$$H = E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{k}{r} \quad (23)$$

y el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{k}{r} \quad (24)$$

Estos pueden expresarse en términos del ángulo β , definido por:

$$\dot{\beta}^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (25)$$

y el hamiltoniano y el lagrangiano pueden expresarse como:

$$H = E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\beta}^2 r^2) - \frac{k}{r} \quad (26)$$

y

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\beta}^2 r^2) + \frac{k}{r} \quad (27)$$

Las bases de la teoría lagrangiana se incluyen en la nota de acompañamiento 270(7). Es posible desarrollar una teoría lagrangiana de dos variables que consiste en las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad (28)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad (29)$$

y una teoría lagrangiana de tres variables que consiste de las ecuaciones de Euler Lagrange (28) junto con:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (30)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

(31)

La Ec. (28) con el lagrangiano (27) da la ecuación de fuerza:

$$m\ddot{r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{r}$$

(32)

y la Ec. (29) con el lagrangiano (27) da la velocidad angular:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$$

(33)

en términos de la constante de movimiento L . Las Ecs. (32) y (33) dan la ecuación orbital en tres dimensiones:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \rho}$$

(34)

la cual se asemeja a una sección cónica, como por ejemplo una elipse. Para facilidad de referencia se le denomina como la elipse beta u órbita principal. La semi latitud recta y la elipticidad se definen como sigue en términos de las constantes de movimiento E , la energía total, y L , la magnitud del momento angular total:

$$\alpha = \frac{L^2}{m k}, \quad \epsilon^2 = 1 + 2 \frac{E L^2}{m k^2}$$

(35)

Si la sección cónica es una elipse, los semi ejes mayor y menor se define mediante:

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{k}{2E}$$

(36)

y

$$b = \frac{\alpha}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}} = \frac{L}{(2mE)^{1/2}}$$

(37)

A partir del lagrangiano (24) y las ecuaciones de Euler Lagrange (30) y (31):

(38)

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0$$

y

(39)

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

Por lo tanto, el momento angular:

(40)

$$L_z = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta$$

es una constante de movimiento pero el momento angular:

(41)

$$L_1 = m r^2 \dot{\theta}$$

no es una constante de movimiento. Las Ecs. (38) y (14) dan el mismo resultado a partir de dos métodos completamente diferentes, Q. E. D. La componente Z del momento angular es, por lo tanto, una constante de movimiento, y en mecánica cuántica se transforma en el operador:

$$\hat{L}_z \psi = m_l \hbar \psi \quad (42)$$

donde ψ es la función de onda, m_l es un número cuántico, y donde \hbar es la constante reducida de Planck.

A partir de las Ecs. (12), (13) y (14) el cuadrado del momento angular es:

$$\begin{aligned} L^2 &= m^2 r^4 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \sin^4 \theta \right) \\ &= m^2 r^4 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (43)$$

de manera que hamiltoniano (23) puede expresarse como:

$$\hat{H} = E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} - \frac{k}{r} \quad (44)$$

y la ecuación de fuerza (32) puede expresarse como la ecuación de Leibniz:

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{k}{r} \quad (45)$$

El cuadrado del momento angular total se conserva:

$$\frac{dL^2}{dt} = 0 \quad (46)$$

y en mecánica cuántica deviene:

$$\hat{L}^2 \psi = \hbar(l+1)\hbar \psi \quad (47)$$

donde l es un número cuántico.

A partir de las Ecs. (43) y (40):

$$L^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \quad (48)$$

de manera que las tres velocidades angulares del sistema son:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{mr^2} \quad (49)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_z}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad (50)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{mr^2} \left(L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} \quad (51)$$

Se deduce entonces que:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{L_z}{L_z} \sin^2 \theta \quad (52)$$

y que:

$$\varphi = \int \frac{L_z d\theta}{\left(L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2}} = -\sin^{-1} \left(\frac{L_z \cos \theta}{\left(L^2 - L_z^2 \right)^{1/2}} \right) \quad (53)$$

a partir de álgebra computacional.

Análogamente:

$$\beta = \int \frac{L}{L_z} \sin^2 \theta \, d\theta \quad (54)$$

y utilizando la Ec. (53):

$$\cos \theta = - \frac{(L^2 - L_z^2)^{1/2}}{L} \sin \beta \quad (55)$$

y:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{L}{L_z} \tan \varphi \right) \quad (56)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{L_z}{L} \tan \beta \right) \quad (57)$$

las Ecs. (53) y (56) dan las sub órbitas $\beta(\theta)$ y $\beta(\varphi)$. Se utilizó álgebra computacional para evaluar las Ecs. (53) y (56). Finalmente, los dos ángulos del sistema polar esférico se interrelacionan mediante:

$$\varphi = -\frac{1}{2} \left(\sin^{-1} \left(\frac{(1 + \cos \theta) L^2 - L_z^2}{(1 + \cos \theta) (L^4 - L_z^2 L^2)} \right) \right. \\ \left. + \sin^{-1} \left(\frac{(\cos \theta - 1) L^2 + L_z^2}{(\cos \theta - 1) (L^4 - L_z^2 L^2)} \right) \right) \quad (58)$$

dando origen a otra sub órbita.

Las principales características de algunas de estas órbitas se incluyen en la Sección 3, junto con una animación.

Se observa que conceptos básicos conducen a resultados completamente inesperados y el surgimiento de un nuevo tema de estudio en lo referido a órbitas tridimensionales construidas a partir de la gravitación universal en coordenadas esféricas polares.

3. Gráficas y animación de algunas de las características orbitales.

En la Sección 2 de este documento se dedujeron las ecuaciones para el cálculo de las órbitas. Para un ángulo dado θ , el ángulo correspondiente φ puede calcularse a través de la Ec.(58), y el ángulo β depende de θ tal como se dedujo en la Ec.(53). Con esta última ecuación, se define la órbita elíptica tridimensional de beta,

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \beta}$$

(59)

Esta es una superficie orbital en 3D, representada gráficamente en la Fig. 1. Sólo se utiliza la mitad del rango de φ (0 a π) para visualizar la estructura tridimensional de una manera clara.

La órbita verdadera es una línea sobre esta superficie y se define por la dependencia $\beta(\theta, \varphi)$. Esto se obtiene en dos etapas. En la primera, $\varphi(\theta)$ se determina a partir de la Ec.(58), y en la segunda se inserta $\beta(\varphi)$ en la ecuación elíptica (59), lo cual resulta en una dependencia funcional $r(\beta(\theta, \varphi))$. La órbita se extiende desde la parte superior hasta la parte inferior de la superficie de la Fig. 1, y se trata de una superficie cerrada. Se representa gráficamente en la Fig. 2. Una proyección de la órbita nos muestra que es plana. Aparecen los bordes porque la forma tridimensional posee puntos no diferenciables en el extremo superior e inferior. (Observar que los conos internos en la Fig. 1 no pertenecen a la superficie sino que son artefactos del programa de graficación). Puede observarse la órbita en algunas versiones animadas en el portal www.aias.us.

La órbita depende de los parámetros L , L_z , α y ϵ . Hasta ahora hemos utilizado $L = 3$; $L_z = 1$; $\alpha = 1$; $\epsilon = 0.5$. La transición $L \rightarrow L_z$ se representa gráficamente en la Fig.3 en una proyección sobre el plano XZ. Puede observarse que la órbita se reduce a una elipse de dos dimensiones que es el límite bidimensional para $\theta \rightarrow \pi/2$. El efecto de la excentricidad ϵ se demuestra en la Fig. 4. El borde de la superficie orbital se vuelve más afilado para valores crecientes de ϵ . Si establecemos $\epsilon > 1$, la parte elipsoidal cambia hacia una superficie hiperbólica, como habría de esperarse, porque la ecuación de la sección cónica (59) describe en dicho caso una hipérbola.

En las dos últimas imágenes se han estudiado las sub órbitas. Las dependencias $\varphi(\theta)$, $\beta(\theta)$ y $\beta(\varphi)$ son unidimensionales, por lo que se muestran en una gráfica tradicional (Fig. 5). θ varía desde 0 a 2π , que es el rango tradicional duplicado para obtener así una curva cerrada. El signo de las curvas debió de cambiarse parcialmente en $\theta = \pi$ para evitar saltos en las curvas, lo cual es un artefacto que se produce con las coordenadas polares esféricas. Puede observarse a partir de la Fig. 5 que las dependencias de las sub órbitas son casi lineales a la mitad de su rango. Esto significa que allí la órbita es elíptica. En la Fig. 6 se representan gráficamente las sub órbitas correspondientes $r(\theta)$, $r(\varphi)$, $r(\beta)$. Son elípticas en la mitad de sus rangos, tal como se predijo. En los bordes no hay tangente vertical, demostrando que hay un punto no diferenciable cuando se traspasa este rango.

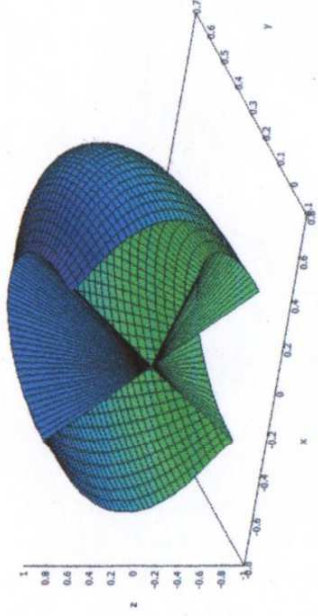


Figura 1: superficie orbital $r(\beta)$.

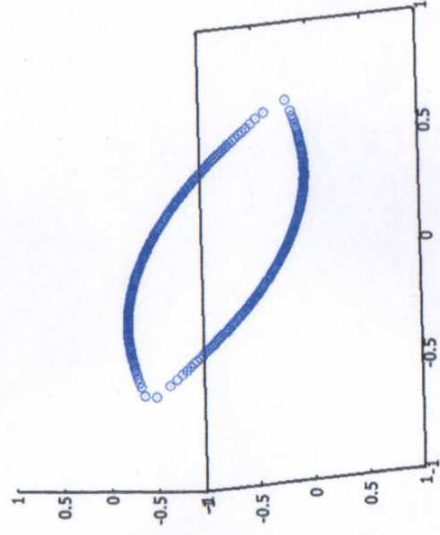


Figura 2: Órbita $r(\beta)$. Esta es una órbita plana sobre la superficie de la Fig. 1.

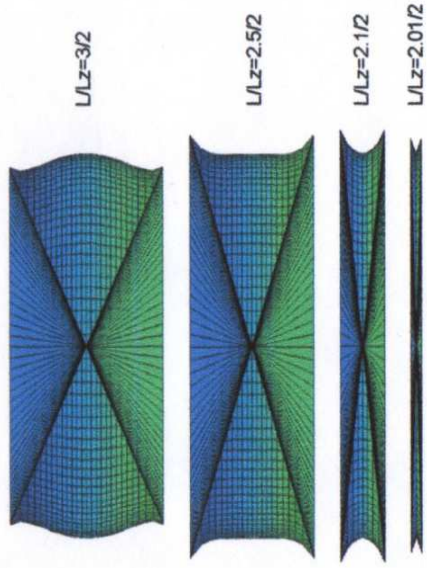


Figura 3: proyecciones de superficies orbitales sobre el plano XZ para varias relaciones L/L_z .

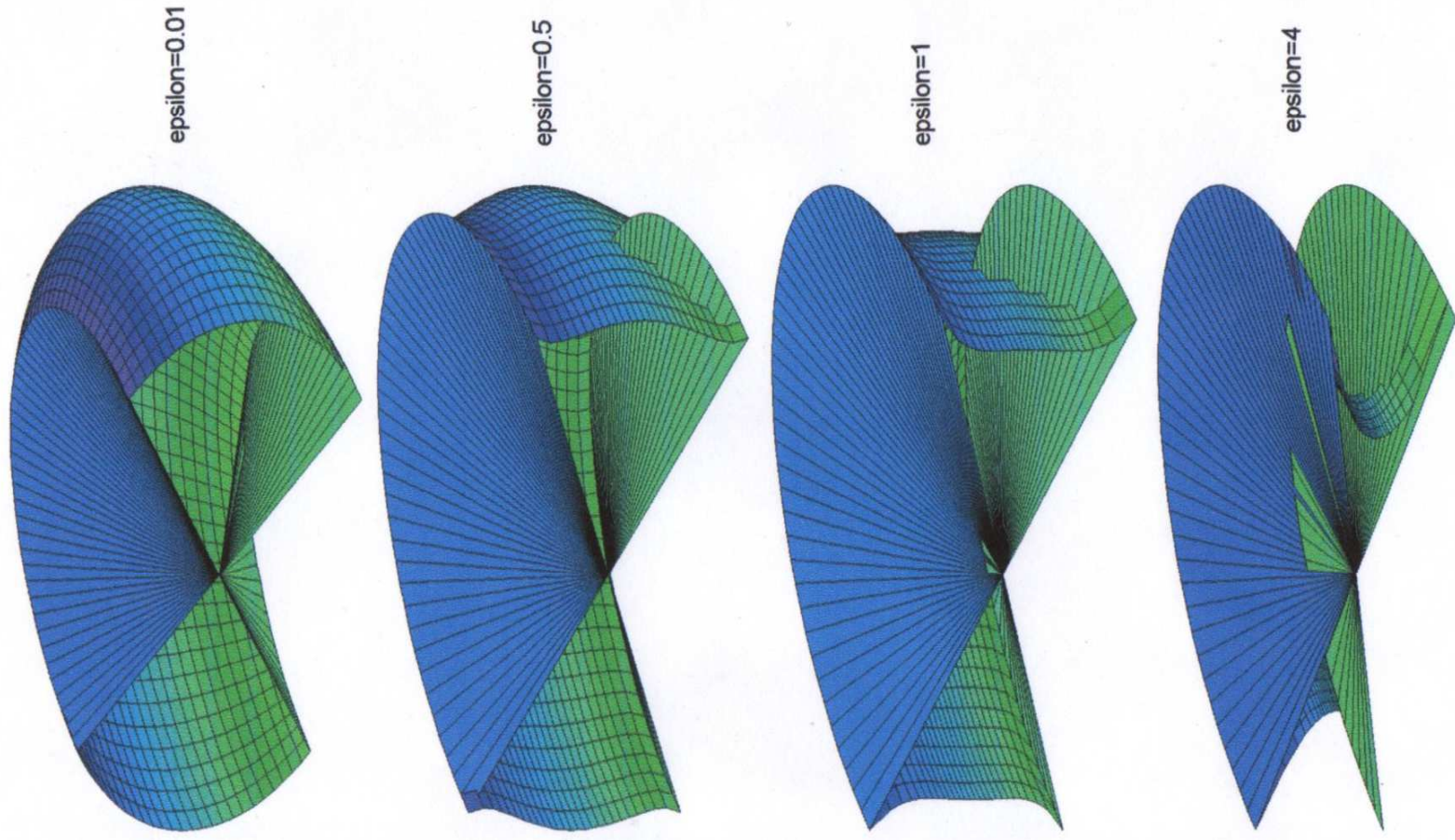


Figura 4: superficies orbitales para varias excentricidades ϵ .

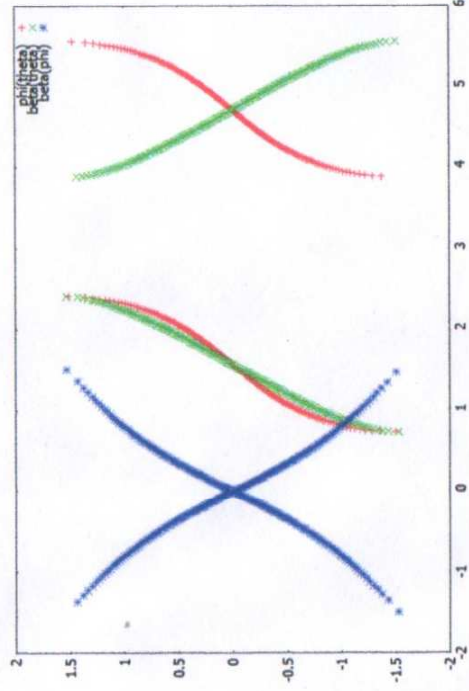


Figura 5: Sub-órbitas $\phi(\theta)$, $\beta(\theta)$ y $\beta(\phi)$.

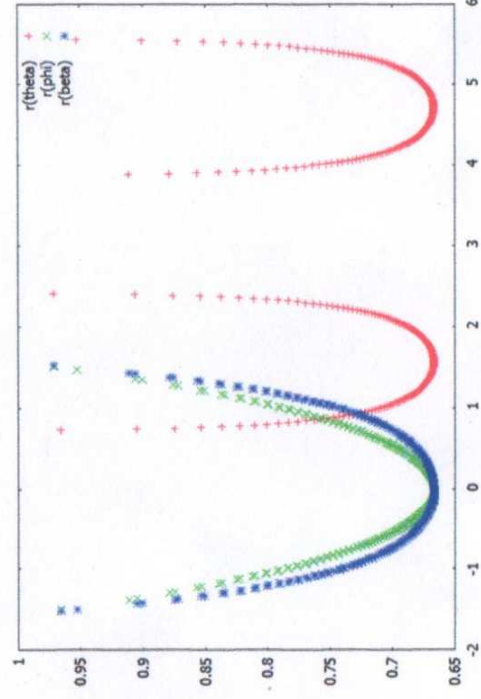


Figura 6: funciones radiales $r(\theta)$, $r(\phi)$ y $r(\beta)$.

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS y a otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por la publicación en red, a Alex Hill por las traducciones y grabaciones en idioma castellano, y a Robert Cheshire por las grabaciones en idioma inglés.

Referencias bibliográficas.

- [1] M .W. Evans, Ed., "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (Cambridge Scientific Science Publishing, CISP, 2012).
- [2] M .W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, "Principles of ECE Theory (de libre acceso en el portal www.aias.us y en formato de libro, en prep.)
- [3] M .W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (de libre acceso en el portal www.aias.us, CISP, 2011).
- [4] M .W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2005 a 2011 y de libre acceso en el portal www.aias.us).
- [5] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis, 2007). Existe traducción al castellano por Alex Hill, de libre acceso en el portal www.aias.us .
- [6] M .W. Evans. H. Eckardt y D. W. Lindstrom, documentos y plenaria de la Academia de Ciencias de Serbia.
- [7] M .W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).
- [8] M .W. Evans y S. Kielich (Ed.), "Modern Nonlinear Optics" (Wiley Interscience, 1992, 1993, 1997 y 2001) en dos volúmenes y seis ediciones.
- [9] M .W. Evans y J.-P. Vigiér, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 a 2002) en 10 volúmenes con encuadernación dura y blanda.
- [10] M .W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagnetron in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).
- [11] E. G. Milewski (Ed.), "The Vector Analysis Problem Solver" (Res. Ed. Association, Nueva York, 1987).
- [12] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics of Particles and Systems" (Harcourt, Nueva York, 188, 3ª Edición).