

Velocidad y Aceleraciones No Newtonianas en Coordenadas Polares Esféricas: Teoría Orbital en Tres Dimensiones.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,

www.webarchive.org.uk, www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.upitec.org,
www.et3m.net

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se calculan la velocidad y las aceleraciones no newtonianas de una órbita tridimensional en coordenadas polares esféricas. Éstas son la velocidad lineal orbital, las aceleraciones centrífuga y de Coriolis y la aceleración debida a la derivada temporal de la velocidad angular. Se deducen dos ecuaciones restrictivas y se evalúan órbitas de diversos tipos a partir de estas ecuaciones restrictivas. Algunas propiedades de las ecuaciones restrictivas muestran estructuras similares a los orbitales atómicos, pero con la estructura teniendo lugar en órbitas macroscópicas. Si el momento angular se encuentra limitado a ubicarse sobre el eje Z , la órbita se aproxima a una elipse plana con precesión.

1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie, se inició el desarrollo de la teoría de órbitas tridimensionales utilizando las coordenadas polares esféricas [1-10]. Se ha demostrado que no existe razón alguna por la que la órbita a partir de la ley de atracción del cuadrado de la inversa debiera de ser una elipse plana. En general, es tridimensional y posee una rica panoplia de propiedades las cuales pueden demostrarse con gráficas tridimensionales. En la Sección 2 se continúa este desarrollo mediante la evaluación de propiedades no newtonianas de una órbita tridimensional: la velocidad lineal orbital y las tres aceleraciones no newtonianas. Éstas son la aceleración centrífuga y la de Coriolis, así como la aceleración debida a la derivada temporal de la velocidad angular. La consideración de las aceleraciones no newtoniana conduce a dos novedosas ecuaciones restrictivas, las cuales pueden resolverse para dar nuevos tipos de órbitas. Cuando se representan gráficamente en tres dimensiones, estas órbitas muestran una estructura macroscópica similar, a nivel microscópico, a la de los orbitales atómicos y moleculares. Las órbitas tridimensionales existen en general y pueden buscarse en astronomía. En la Sección 3 se incluye una selección de gráficas con un análisis de sus principales características. Todos los cálculos en este documento han sido verificados mediante álgebra computacional, tal como sucede con todo los documentos de la serie UFT.

2. Las propiedades no newtonianas de las órbitas tridimensionales.

Como es habitual, este documento debiera de leerse en conjunción con sus notas de acompañamiento, las cuales se incluyen junto con el documento original UFT271 en el portal www.aiaa.us. Las Notas 271(1) a 271(3) incluyen cierto análisis de antecedentes en preparación para la Nota 271(4), la cual constituye una revisión del cálculo de la velocidad no newtoniana y de las aceleraciones en coordenadas polares planas, efectuadas en documentos previos de esta serie. La Nota 271(5) incluyen detalles que se han resumido en esta sección.

Se ha demostrado en los documentos de la serie UFT inmediatamente precedente que la velocidad lineal en coordenadas polares esféricas [11] es:

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin\theta \underline{e}_\varphi \quad (1)$$

Donde los vectores unitarios del sistema de coordenadas polares esféricas se definen [12] mediante:

$$\underline{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \underline{i} + \sin\theta \sin\varphi \underline{j} + \cos\theta \underline{k} \quad (2)$$

$$\underline{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \underline{i} + \cos\theta \sin\varphi \underline{j} - \sin\theta \underline{k} \quad (3)$$

$$\underline{e}_\varphi = -\sin\varphi \underline{i} + \cos\varphi \underline{j} \quad (4)$$

formando el conjunto simétrico cíclico de ecuaciones:

$$\underline{e}_\psi \times \underline{e}_r = \underline{e}_\theta \quad (5)$$

$$\underline{e}_\theta \times \underline{e}_\psi = \underline{e}_r \quad (6)$$

$$\underline{e}_r \times \underline{e}_\theta = \underline{e}_\psi. \quad (7)$$

La Ec. (1) puede expresarse como:

$$\underline{v} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (8)$$

donde el vector posición es:

$$\underline{r} = r \underline{e}_r \quad (9)$$

y donde la velocidad angular o conexión de espín de Cartan [1-10] es

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \underline{e}_\psi - \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\theta. \quad (10)$$

Por lo tanto, esta teoría forma parte de la teoría del campo unificado ECE basada en la geometría de Cartan. La aceleración lineal es, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times \underline{r} \right) \\ &= \ddot{r} \underline{e}_r + \dot{r} \dot{\underline{e}}_r + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \end{aligned} \quad (11)$$

(12)

Ahora utilizamos [12]:

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\psi \quad (13)$$

A partir de las Ecs. (1) y (10):

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} &= \underline{\omega} \times \underline{v} = \dot{r} \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\psi \\ &\quad - (r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r \dot{\theta}^2) \underline{e}_r \end{aligned} \quad (14)$$

y a partir de las Ecs. (9) y (10):

$$\underline{\omega} \times (\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}) = -\left(r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r \dot{\theta}^2 \right) \underline{e}_r \quad (15)$$

Se deduce que:

$$\underline{\omega} \times \underline{v} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \dot{\theta} \dot{\underline{e}}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\varphi \quad (16)$$

A partir de las Ecs. (12), (13) y (16):

$$\underline{a} = \ddot{r} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + 2(\dot{\theta} \dot{\underline{e}}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\varphi) \quad (17)$$

Nótese ahora que:

$$\underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r = \dot{\theta} \dot{\underline{e}}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\varphi \quad (18)$$

de manera que la aceleración lineal en coordenadas polares esféricas es:

$$\underline{a} = \ddot{r} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + 2 \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r. \quad (19)$$

Los resultados principales de este análisis son como sigue.

1) La velocidad angular o conexión de espín de Cartan es:

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= \dot{\theta} \underline{e}_\theta - \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\varphi \\ &= \frac{\underline{L}}{m r^2} \end{aligned} \quad (20)$$

• donde \underline{L} es el momento angular total en tres dimensiones:

$$\underline{L} = L_x \underline{i} + L_y \underline{j} + L_z \underline{k} \quad (21)$$

con tres componentes cartesianas en general.

2) La velocidad lineal orbital es:

$$\underline{V}_{\text{orbital}} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\varphi \quad (22)$$

y en general es tridimensional. Para convertir a vectores unitarios cartesianos debemos utilizar las Ecs. (2) a (4).

3) La aceleración centrífuga es:

$$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = - (r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r \dot{\theta}^2) \underline{e}_r \quad (23)$$

y posee tres coordenadas cartesianas en general.

4) La aceleración de Coriolis es:

$$\underline{a}_{\text{Coriolis}} = 2 \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r = 2 (\dot{r} \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\varphi) \quad (24)$$

y ésta también es tridimensional en general.

5) El tercer tipo de aceleración no newtoniana es:

$$\underline{a}_3 = \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} \quad (25)$$

y puede evaluarse utilizando:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\omega}} &= \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \underline{e}_\varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\theta) \\ &= \ddot{\theta} \underline{e}_\varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi - \ddot{\varphi} \sin \theta \underline{e}_\theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_\theta - \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\theta} \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (26)$$

Consideremos ahora las siguientes relaciones fundamentales que se incluyen en la referencia [12]:

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (27)$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = -\dot{\theta} \underline{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \underline{e}_\varphi \quad (28)$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\sin \theta \dot{\varphi} \underline{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \underline{e}_\theta \quad (29)$$

Se deduce que la aceleración angular es:

$$\underline{\dot{\omega}} = (\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta) \underline{e}_\varphi - (2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos\theta + \ddot{\varphi} \sin\theta) \underline{e}_\theta \quad (30)$$

y:

$$\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r} = r \left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta \right) \underline{e}_\theta + r \left(\ddot{\varphi} \sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \right) \underline{e}_\varphi$$

De manera que esta aceleración es, nuevamente, no newtoniana en general.

Por lo tanto, la ecuación orbital de Leibniz es:

$$m \ddot{r} \underline{e}_r = -m \left(\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2 \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} \right) - \frac{k}{r^2} \underline{e}_r \quad (31)$$

y puede aplicarse igualmente bien a órbitas macroscópicas de una masa m que orbita alrededor de una masa M , o al movimiento de un electrón alrededor de un protón. En el primer caso:

$$k = m M G \quad (32)$$

donde G es la constante de Newton. En el segundo caso:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (33)$$

donde e es la carga del protón y donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío.

La Ec. (31) se divide en dos ecuaciones:

$$m \ddot{r} = r \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \right) - \frac{k}{r^2} \quad (34)$$

y:

$$2 \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} = 0. \quad (35)$$

La Ec. (34) se cumple para cada componente de \underline{e}_r , con:

$$m\ddot{r}\underline{e}_r = m\ddot{r}(\sin\theta\cos\varphi\underline{i} + \sin\theta\sin\varphi\underline{j} + \cos\theta\underline{k}) \quad (36)$$

Mostrando de otra manera que la órbita es tridimensional. La órbita está restringida por la Ec. (35), que da:

$$2(\dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\underline{e}_\varphi) + r(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\underline{e}_\theta + r(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\underline{e}_\varphi = \underline{0} \quad (37)$$

y dos ecuaciones restrictivas:

$$r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + 2r\dot{\theta} = 0 \quad (38)$$

y:

$$r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2r\dot{\varphi}\sin\theta = 0 \quad (39)$$

A partir del documento UFT270 inmediatamente precedente:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{m r^2 \sin\theta} \quad (40)$$

y:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{m r} \left(L_z^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta} \right)^{1/2} \quad (41)$$

donde L_z es la componente Z del momento angular total \underline{L} .

El momento angular en tres dimensiones se define mediante:

(42)

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

y la conservación del momento angular implica que:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{0}.$$

(43)

Sin embargo:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{r} \times \underline{\dot{p}} + \underline{v} \times \underline{p}$$

(44)

de manera que la conservación del momento angular implica que no existe un torque neto:

$$\underline{\tau} = \frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{0} \times \underline{a} = \underline{0}.$$

(45)

La aceleración es:

$$\underline{a} = \ddot{r} \underline{e}_r + \dot{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + \dot{\omega} \times \underline{r} + 2 \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r$$

(46)

con:

$$\dot{\omega} \times \underline{r} + 2 \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} \underline{e}_r = \underline{0}$$

(47)

de manera que la aceleración es:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \ddot{r} \underline{e}_r + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \\ &= \left(\ddot{r} - (r \dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right) \underline{e}_r \end{aligned}$$

(48)

lo cual implica que:

$$\underline{r} \times \underline{a} = \underline{0}$$

(49)

QED. Por lo tanto, el análisis resulta totalmente consistente.

En términos de los vectores unitarios cartesianos [1-12]:

$$\begin{aligned} \underline{r} &= r \underline{e}_r = r (\sin\theta \cos\varphi \underline{i} + \sin\theta \sin\varphi \underline{j} + \cos\theta \underline{k}) \\ &= X \underline{i} + Y \underline{j} + Z \underline{k} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \underline{p} &= m \left(\dot{r} \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta \cos\varphi \dot{\theta} - r \sin\theta \sin\varphi \dot{\varphi} \right) \underline{i} \\ &+ \left(\dot{r} \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta \sin\varphi \dot{\theta} + r \sin\theta \cos\varphi \dot{\varphi} \right) \underline{j} \\ &+ \left(\dot{r} \cos\theta - r \dot{\theta} \sin\theta \right) \underline{k} = P_x \underline{i} + P_y \underline{j} + P_z \underline{k} \end{aligned} \quad (51)$$

De manera que el momento angular es paralelo a la velocidad angular:

$$\begin{aligned} \underline{L} &= m r^2 \underline{\omega} = m r^2 (\dot{\theta} \underline{e}_\theta - \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi) \\ &= m r^2 \left((-\dot{\theta} \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi) \underline{i} \right. \\ &\quad \left. + (\dot{\theta} \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi) \underline{j} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\varphi} \sin^2\theta \underline{k} \right) = L_x \underline{i} + L_y \underline{j} + L_z \underline{k}. \end{aligned} \quad (52)$$

Por lo tanto, ni \underline{r} ni \underline{p} están confinados en general al plano XY , y \underline{L} no está confinado al eje Z perpendicular a este plano. La teoría habitual de órbitas [1] se inicia con estas suposiciones muy restrictivas e injustificables. Estas últimas son equivalentes a suponer que:

$$\theta = \pi/2 \quad (53)$$

$$\dot{\theta} = 0 \quad (54)$$

cuando el análisis se reduce a:

$$\underline{r} = r (\cos\varphi \underline{i} + \sin\varphi \underline{j}) \quad (55)$$

$$\underline{p} = m \left((\dot{r} \cos\varphi - r \dot{\varphi} \sin\varphi) \underline{i} + (\dot{r} \sin\varphi + r \dot{\varphi} \cos\varphi) \underline{j} \right) \quad (56)$$

donde:

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = -m r^2 \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (57)$$

Utilizando la Ec. (3) se obtiene el habitual momento angular de la teoría de orbitales planos:

$$\underline{L} = m r^2 \dot{\varphi} \underline{k} \quad \text{para } \vartheta = \pi/2 \quad (58)$$

QED. Llamativamente, las suposiciones restrictivas (53, 54) han constituido la base de la teoría orbital durante más de 400 años, y en consecuencia la mayor parte de la información acerca de las órbitas nunca ha sido analizada.

Consideremos las siguientes tres ecuaciones que determinan todas las órbitas tridimensionales debidas a la ley del cuadrado de la inversa:

$$m \ddot{r} = r \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) - \frac{k}{r^2} \quad (59)$$

$$r \ddot{\vartheta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 \dot{r} \dot{\vartheta} = 0 \quad (60)$$

$$r \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 r \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \vartheta = 0 \quad (61)$$

En dos dimensiones las mismas devienen:

$$m \ddot{r} = r \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{r^2} \quad (62)$$

$$0 = 0 \quad (63)$$

$$r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \quad (64)$$

y la Ec. (64) ya se ha deducido en documentos previos de la serie UFT [1-10]. En dos dimensiones:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2} \quad (65)$$

de manera que

$$\ddot{\psi} = \frac{d\dot{\psi}}{dt} = \frac{d\dot{\psi}}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{ZL}{mr^3} \dot{r} \quad (66)$$

y la Ec. (64) se deduce inmediatamente, QED.

Consideremos ahora la Ec. (61) en tres dimensiones. La Ec. (66) ya no puede utilizarse porque $\dot{\psi}$ es una función de r y θ , y éstas no son variables independientes. Análogamente, $\dot{\theta}$ es una función de r y φ , las cuales nuevamente no son variables independientes. De manera que en tres dimensiones, las Ecs. (60) y (61) son ecuaciones diferenciales simultáneas. A medida que la órbita se aproxima a una órbita plana:

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (67)$$

y

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (68)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (69)$$

y las Ecs. (60) y (61) se simplifican a:

$$\dot{\psi} \rightarrow \frac{L - Z}{mr^2}, \quad \dot{\theta} \rightarrow \frac{(L^2 - L_z^2)^{1/2}}{mr^2} \quad (70)$$

Es posible evaluar las aceleraciones angulares $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\varphi}$ como sigue, y éstas se representan gráficamente en la Sección 3. Muestran estructuras de tipo orbitales muy interesantes, halladas en átomos y moléculas, pero poseen una naturaleza macroscópica. Vienen dadas por el siguiente conjunto de ecuaciones deducidas en los documentos inmediatamente precedentes a éste:

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{Z}{r} \dot{r}\dot{\theta} \quad (71)$$

$$\ddot{\varphi} = -2 \left(\frac{\dot{\theta}\dot{\varphi}}{\tan\theta} + \frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \right) \quad (72)$$

donde la órbita beta es:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\beta} \quad (73)$$

con:

$$\cos \vartheta = - \frac{L}{(L^2 - L_z^2)^{1/2}} \cos \vartheta. \quad (74)$$

La semi latitud recta α y la excentricidad ε de la órbita beta son:

$$\alpha = \frac{L^2}{mk}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \quad (75)$$

donde E es la energía total y L es la magnitud del momento angular total.

Las velocidades angulares vienen dadas por las Ecs. (40) y (41) y la cantidad \dot{r} viene dada por el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad (76)$$

de manera que:

$$\dot{r} = \left(\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} \right) \right)^{1/2}. \quad (77)$$

Utilizando estas ecuaciones tanto $\ddot{\varphi}$ como $\ddot{\theta}$ pueden obtenerse en términos de φ y θ . Las representaciones gráficas de $\dot{\theta}$ en función de θ y de $\dot{\varphi}$ en función de φ caracterizan la órbita tridimensional, tal como también lo hacen las gráficas de r en función de θ y r en función de φ . Para una órbita plana:

$$\ddot{\theta} = 0 \quad (78)$$

y:

$$\ddot{\varphi} = -2 \frac{\dot{r} \dot{\varphi}}{r} \quad (79)$$

donde \dot{r} viene dada por la Ec. (77) y donde:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (80)$$

con:

$$\dot{\varphi} = \frac{L - L_z}{mr^2} \quad (81)$$

De manera que $\ddot{\varphi}$ puede representarse gráficamente en función de φ para una órbita plana y compararse directamente con los resultados para una órbita tridimensional, para la misma ley del cuadrado de la inversa.

La relación entre β y φ es:

$$\tan \beta = \frac{L_z}{L} \tan \varphi \quad (82)$$

y la relación entre β y θ es:

$$\text{sen } \beta = - \frac{L}{(L^2 - L_z^2)^{1/2}} \cos \theta \quad (83)$$

de manera que φ puede expresarse en términos de θ y viceversa. A medida que uno se aproxima al límite plano:

$$L \longrightarrow L_z \quad (84)$$

y a partir de la Ec. (82):

$$\beta \longrightarrow \varphi \quad (85)$$

QED. La ecuación (73) se reduce correctamente al límite plano, demostrando de otra manera que la teoría resulta completamente consistente. Utilizando la expansión de MacLaurin, la Ec. (82) deviene:

$$\beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{2}{15}\beta^5 + \dots = \frac{L_z}{L} \left(\varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{2}{15}\varphi^5 + \dots \right) \quad (86)$$

y a partir de las Ecs. (84) y (85) se obtienen los siguientes resultados a medida que uno se aproxima a la órbita plana:

$$\beta \longrightarrow \frac{L_z}{L} \varphi \quad (87)$$

$$\frac{\beta^3}{3} \longrightarrow \frac{L_z}{L} \frac{\varphi^3}{3} \quad (88)$$

y demás dentro de los límites de la expansión de MacLaurin:

$$\beta < 1, \quad \varphi < 1. \quad (89)$$

La elipse beta tridimensional se aproxima a una elipse plana con precesión:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\left(\frac{t}{L_z} - \varphi\right)} \quad (90)$$

La cual deviene una elipse plana estática si y sólo si L_z deviene exactamente L . Es bien sabido que las órbitas planetarias son elipses con precesión, lo cual sugiere que constituyen restos de elipses beta tridimensionales.

3. Gráficas y análisis.

En esta sección se discuten órbitas, velocidades radiales y angulares y aceleraciones en coordenadas polares esféricas. La órbita elíptica viene dada por la Ec. (73), las aceleraciones angulares se definen en las ecuaciones (71) y (72) y las velocidades angulares en las ecuaciones (40) y (41). La aceleración radial se obtiene a partir de la Ec. (34) y la velocidad radial por la Ec. (77). Las cantidades angulares son independientes del potencial, mientras que las cantidades radiales dependen del mismo. Todas las órbitas pueden describirse a través de θ ó φ . Ambas coordenadas pueden transformarse, la una en la otra, a través de

$$\varphi = -\frac{1}{2} \left(a \operatorname{sen} \left(\frac{(\cos \theta + 1) L^2 - L_z^2}{\sqrt{L^4 - L_z^2 L^2}} \right) \right. \quad (91)$$

$$\left. + a \operatorname{sen} \left(\frac{(\cos \theta - 1) L^2 + L_z^2}{\sqrt{L^4 - L_z^2 L^2}} \right) \right),$$

$$\theta = \pi - a \cos \left(\frac{\tan \varphi \sqrt{L^2 - L_z^2}}{\sqrt{\tan^2 \varphi L^2 + L_z^2}} \right). \quad (92)$$

La coordenada derivada β puede calcularse a partir de φ y θ mediante

$$\beta(\varphi) = a \tan \left(\frac{\tan \varphi L}{L_z} \right), \quad (93)$$

$$\beta(\theta) = -a \operatorname{sen} \left(\frac{\cos \theta L}{\sqrt{L^2 - L_z^2}} \right). \quad (94)$$

La órbita viene dada por

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \beta} \quad (95)$$

con α y ϵ definidos por la Ec. (75).

Primero analizaremos las superficies orbitales dependientes de φ . Las Figs. 1-3 muestran la superficie orbital radial y su primera y segunda derivada temporales. Las elipses orbitales de las derivadas muestran hendiduras debido a los cruzamientos por el valor igual a cero que allí ocurre. Las derivadas respecto de θ (Figs. 4-6) muestran una estructura orbital de tipo atómica, con lóbulos de tamaños diferentes. Las derivadas respecto de φ (Fig. 6-7) muestran ambas formas.

Las superficies respecto de θ son en su mayoría elipsoides y toroides que ya se habían mostrado en documentos previos. La superficie de \dot{r} es una doble elipsoide (Fig. 8) y está abierta de un lado como un cáliz (Fig. 9). Esta estructura se presenta como una gráfica tradicional $\dot{\theta}(\theta)$ en la Fig. 10 como ejemplo. La torcedura en $\theta = \pi/2$ puede haber sido causada por artefactos provenientes de funciones trigonométricas inversas. Deberá notarse que para las superficies que se muestran sólo es posible mostrar valores positivos en las gráficas tridimensionales. El programa de gráficas convierte parcialmente valores negativos a positivos. Un análisis más profundo requiere del observar los diagramas tradicionales pero no resulta tan ilustrativo.

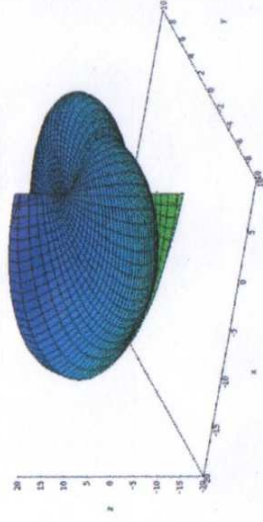


Figura 1: dependencia respecto de φ de r .

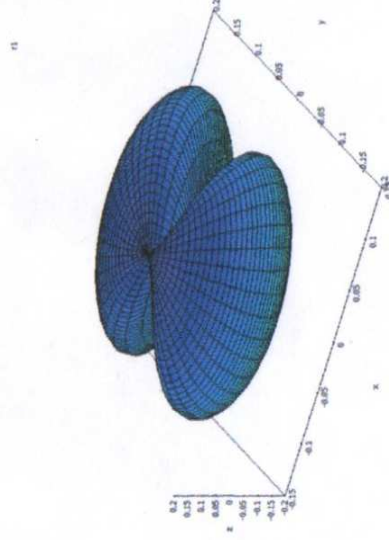


Figura 2: dependencia respecto de φ de \dot{r} .

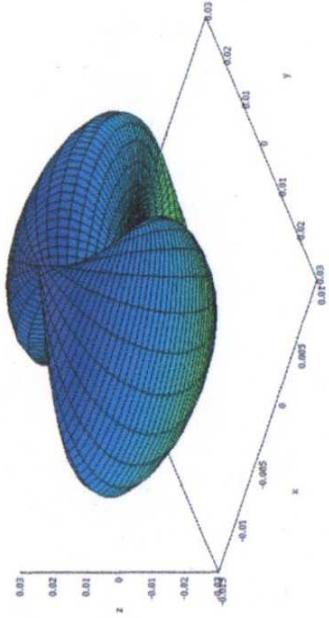


Figura 3: dependencia respecto de \ddot{r} .

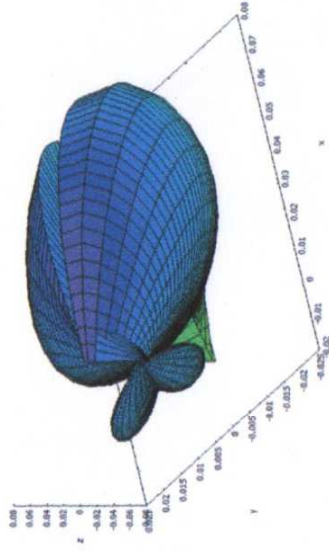


Figura 4: dependencia respecto de $\dot{\theta}$.

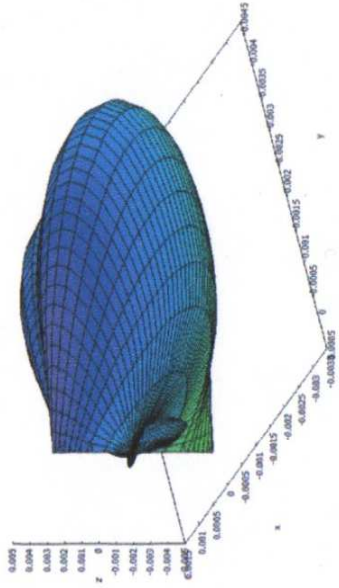


Figura 5: dependencia respecto de $\ddot{\theta}$.

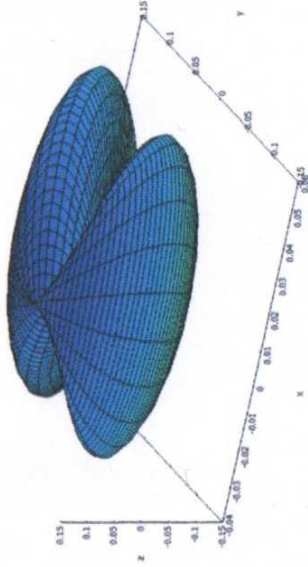


Figura 6: dependencia respecto de θ de $\dot{\varphi}$.

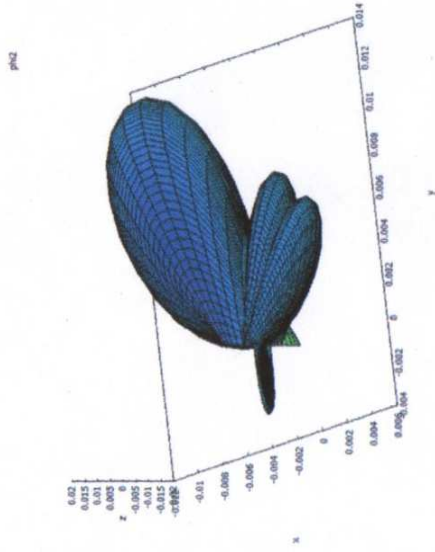


Figura 7: dependencia respecto de θ de $\ddot{\varphi}$.

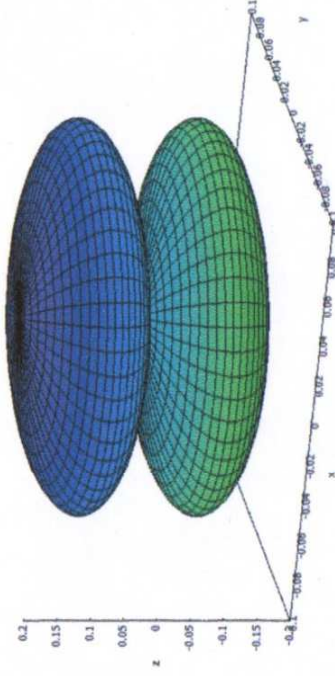


Figura 8: dependencia respecto de θ de \dot{r} .

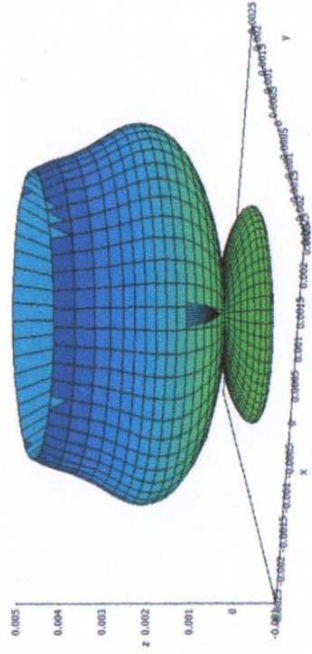


Figura 9: dependencia respecto de θ de $\ddot{\theta}$.

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por la publicación en red, a Alex Hill por las traducciones y grabaciones en idioma castellano y a Robert Cheshire por las grabaciones en idioma inglés.

Referencias bibliográficas.

- [1] M. W. Evans, ed. "Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity" (Cambridge International Science Publishing, CISP, www.cisp-publishing.com, 2012).
- [2] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, "Criticisms of the Einstein Field Equation" (CISP, 2011, de libre acceso en el portal www.aias.us.)
- [3] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, "Principles of ECE Theory") de libre acceso en el portal www.aias.us, versión preliminar).
- [4] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, Suffolk, 2005 a 2011) en siete volúmenes.
- [5] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, documentos científicos y plenarias acerca de la teoría ECE.
- [6] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis Academic, 2007 y de libre acceso en el portal www.aias.us, traducción al castellano por Alex Hill de libre acceso en el portal www.aias.us).
- [7] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).
- [8] M. W. Evans y S. Kielich, Eds., "Modern Nonlinear Optics" (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001) en dos ediciones y seis volúmenes, con encuadernación de tapa dura y blanda y en libro e.
- [9] M. W. Evans y J.-P. Vigié, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, Dordrecht, 1994 a 2002) en diez volúmenes con encuadernación dura y blanda.
- [10] M. W. Evans y A. A. Hasanein, "The Photomagnetron in Quantum Field Theory" (World Scientific, 1994).
- [11] J. B. Marion y S. T. Thornton, "Classical Dynamics of Particles and Systems" (Harcourt, Nueva York, 1988, tercera edición).
- [12] E. G. Milewski, Chief Editor, "The Vector Analysis Problem Solver" (Research and Education Association, Nueva York, 1987, impresión revisada).