Reducción de la Teoría ECE del Electromagnetismo a la Teoría de Maxwell-Heaviside, Parte II.

Douglas W. Lindstrom,

Horst Eckardt

Alpha Institute for Advanced Study (AIAS).

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

En este documento se demuestra que si el potencial escalar es separable, entonces el potencial vectorial también es separable. Se muestra que la conexión de espín vectorial es independiente del tiempo. También se muestra que si los potenciales son separables entonces las ecuaciones de la teoría ECE del electromagnetismo se reducen a las ecuaciones de Maxwell-Heaviside del electromagnetismo. Esta suposición podría explicar la escasa evidencia experimental que no posee una naturaleza maxwelliana.

Palabras clave: teoría ECE, ecuaciones de Maxwell-Heaviside, electromagnetismo.

Fecha de publicación: 12/3/2010

1. Introducción.

La teoría ECE del electromagnetismo es rica en comportamiento no lineal [1]. En este documento demostraremos que si el potencial escalar es una función separable, lo cual se supone típicamente en los análisis, entonces las ecuaciones de la teoría ECE se reducen a las de Maxwell-Heaviside, desapareciendo la riqueza del comportamiento no lineal. Esto ofrece una explicación respecto de la relativa ausencia de evidencia experimental para el comportamiento no maxwelliano. Esto se demostrará en dos pasos. En el primer paso, si se supone que si el potencial escalar es una función separable, entonces se demuestra que el potencial vectorial también es separable. Subsecuentemente, se demuestra que dado lo anterior, la teoría ECE del electromagnetismo sufre un colapso y se transforma en la teoría de Maxwell-Heaviside.

2. Reducción de la teoría.

Las ecuaciones de antisimetría vienen dadas por [2]

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \underline{\nabla}\phi + \omega_0 \underline{A} + \underline{\omega}\phi = 0 \quad , \tag{1}$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial x_k} + \omega_j A_k + \omega_k A_j = 0 \quad . \tag{2}$$

La Ec. (2) se ha resuelto para dar la conexión de espín vectorial como una función diferencio-algebraica del potencial vectorial magnético [3].

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2A_2A_3}\left(A_1\frac{\partial A_3}{\partial y} + A_1\frac{\partial A_2}{\partial z} - A_2\frac{\partial A_3}{\partial x} - A_2\frac{\partial A_1}{\partial z} - A_3\frac{\partial A_2}{\partial x} - A_3\frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2A_1A_3}\left(-A_1\frac{\partial A_3}{\partial y} - A_1\frac{\partial A_2}{\partial z} + A_2\frac{\partial A_3}{\partial x} + A_2\frac{\partial A_1}{\partial z} - A_3\frac{\partial A_2}{\partial x} - A_3\frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2A_1A_2}\left(-A_1\frac{\partial A_3}{\partial y} - A_1\frac{\partial A_2}{\partial z} - A_2\frac{\partial A_3}{\partial x} - A_2\frac{\partial A_1}{\partial z} + A_3\frac{\partial A_2}{\partial x} + A_3\frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Por brevedad podemos adoptar la notación

$$\underline{\omega} = \underline{\mathcal{L}}(\underline{A}) \tag{4}$$

Donde el operador $\underline{\mathcal{L}}$ se conoce a partir de la Ec. (3).

Tomando el producto vectorial de la Ec. (1) con $\boldsymbol{A}$ y utilizando la Ec. (2) tenemos

$$\underline{\omega} \times \underline{A} = \frac{1}{\phi}\left(\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) \times \underline{A} \,. \tag{5}$$

Para demostrar que si ϕ es separable, entonces el potencial vectorial también es separable, suponemos que el potencial escalar puede separarse en una función de espacio y una función de tiempo, es decir

$$\phi = \phi^{(t)}(t)\,\phi^{(r)}(\underline{r}) \,. \tag{6}$$

Si sustituimos esto en la ecuación de antisimetría eléctrica (1) entonces

$$\phi^{(t)}\underline{\nabla}\phi^{(r)} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \omega_0 \underline{A} + \underline{\omega}\,\phi^{(t)}\phi^{(r)} . \tag{7}$$

Dividiendo la Ec. (7) entre $\phi^{(t)}$, tenemos

$$\underline{\nabla}\phi^{(r)} = \frac{1}{\phi^{(t)}}\left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \omega_0 \underline{A}\right) + \underline{\omega}\,\phi^{(r)} = \underline{f}(\underline{r}) \,, \tag{8}$$

una función con dependencia solamente espacial.

A partir de esto, resulta de inmediato aparente que si ϕ no es igual a cero, entonces

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(r)}(\underline{r}) \qquad \text{y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \omega_0 \underline{A} = \underline{g}(\underline{r})\,\phi^{(t)} . \tag{10}$$

Esto significa que

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = \underline{A}^{(r)} \phi^{(t)} , \tag{11}$$

$$\underline{A} = \underline{A}^{(r)} \int \phi^{(t)} dt . \tag{12}$$

La sustitución de las Ecs. (9), (10) y (11) en la Ec. (8) resulta en

$$\omega_0^{(r)} = \omega_0(\underline{r}) \frac{\phi^{(t)}}{\int \phi^{(t)} dt} . \tag{13}$$

Así, si ϕ resulta separable, entonces el potencial vectorial es separable en un producto de funciones de tipo espacial y de tipo temporal, con la conexión de espín vectorial independiente del tiempo. Más aún, si sustituimos las Ecs. (9), (11), (12) y (13) en la Ec. (1) tenemos que

$$\underline{\nabla} \phi^{(r)} - \underline{A}^{(r)} - \underline{\omega}^{(r)} \phi^{(r)} = \omega_0 \underline{A}^{(r)} . \tag{14}$$

Tomando el producto vectorial de la Ec. (1) con $\boldsymbol{\omega}$ da

$$\underline{\omega} \times \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \underline{\omega} \times \underline{\nabla} \phi + \omega_0 \underline{\omega} \times \underline{A} = 0 .$$

Sustituyendo las Ecs. (6), (11), (12) y (13) en la anterior da

$$\underline{\omega}^{(r)} \times \underline{A}^{(r)} = \frac{\underline{\omega}^{(r)} \times \underline{\nabla} \phi^{(r)}}{1 + \omega_0^{(r)}} , \tag{15}$$

pero por la Ec. (5),

$$\underline{\omega}^{(r)} \times \underline{A}^{(r)} = \frac{\underline{\nabla} \phi^{(r)}}{\phi^{(r)}} \times \underline{A}^{(r)} . \tag{16}$$

Comparando las Ecs. (15) y (16) da

$$\frac{\underline{\nabla} \phi^{(r)}}{\phi^{(r)}} \times \underline{A}^{(r)} = - \frac{\underline{\nabla} \phi^{(r)} \times \underline{\omega}^{(r)}}{1 + \omega_0^{(r)}} . \tag{17}$$

La solución a la Ec. (17) es que

$$\frac{\underline{\omega}^{(r)}}{1+\omega_0^{(r)}} = -\frac{\underline{A}^{(r)}}{\phi^{(r)}} + k\underline{A}^{(r)}$$

donde k es una función arbitraria de coordenadas espaciales.

Esto significa que $\boldsymbol{\omega}$ es paralelo a $\boldsymbol{A}$, es decir

$$\underline{\omega} \times \underline{A} = 0 . \tag{18}$$

Consideremos la ecuación de Faraday,la Ley de Coulomb, y la ecuación de Maxwell Ampere, incorporando la limitación de la Ec. (18).

La ecuación de Faraday da

$$\underline{\nabla} \times \left(\underline{\omega}\phi - \omega_0 \underline{A}\right) = 0 . \tag{19}$$

La ecuación de Coulomb deviene

$$\underline{\nabla} \cdot \left(\underline{\omega}\phi - \omega_0 \underline{A}\right) = \frac{\rho}{\epsilon} - \underline{\nabla} \cdot \left(-\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) \tag{20}$$

y la ecuación de Maxwell-Ampere en forma de potencial, notando la Ec. (18), es

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \left(\underline{\omega}\phi - \omega_0 \underline{A}\right) - \underline{\nabla}\phi\right) = \mu \underline{J} \tag{21}$$

Esto se simplifica a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\omega}\phi - \omega_0 \underline{A}\right) = c^2\left(\left(-\nabla^2 \underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \mu \underline{J}\right) + \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right) \tag{22}$$

Sustituyendo las Ecs. (9), (11), (12) y (13) en esta ecuación y dividiendo entre $\partial\phi^{(r)}/\partial t$ da

$$\underline{\omega}^{(r)}\phi^{(r)} - \omega_0^{(r)}\underline{A}^{(r)} =$$

$$c^2\left(-\nabla^2\underline{A}^{(r)}\int\phi^{(t)}dt + \frac{\underline{A}^{(r)}}{c^2}\frac{\partial\phi^{(t)}}{\partial t} - \mu\underline{J}\right)\left(\frac{1}{\frac{\partial\phi^{(t)}}{\partial t}}\right) + c^2\underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}^{(r)}\int\phi^{(t)}dt + \frac{\phi^{(r)}}{c^2}\frac{\partial\phi^{(t)}}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{\frac{\partial\phi^{(t)}}{\partial t}}\right). \qquad (23)$$

El lado derecho de esta expresión no es únicamente una función de las coordenadas espaciales. Esto requiere entonces, para que la Ec. (25) fuese válida, que tanto el lado derecho como el lado izquierdo de la ecuación debieran ambos ser iguales a cero.

El hecho de que el lado izquierdo de la ecuación sea igual a cero nos da que, al multiplicar por $\partial\phi^{(t)}/\partial t$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\omega}\phi - \omega_0\underline{A}\right) = 0$$

ó

$$\underline{\omega}\phi - \omega_0\underline{A} = \underline{f}(\underline{r}). \qquad (24)$$

Para que el lado derecho de la Ec. (23) sea igual a cero, una condición suficiente es que

$$-\nabla^2\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial t^2} - \mu\underline{J} = 0 \qquad (25)$$

y

$$\nabla\left(\nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = 0. \qquad (26)$$

La Ec. (25) es la ecuación de onda maxwelliana para el potencial vectorial y la Ec. (26) es el gradiente de la restricción de Lorenz del electromagnetismo clásico [4,5].

Si sustituimos la Ec. (24) en la Ec. (20), podemos expresar con un potencial escalar $\zeta^{(r)}$:

$$\nabla^2 \zeta^{(r)} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \underline{\nabla} \cdot \left(-\underline{\nabla} \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right)$$

donde el lado izquierdo es un resultado de la Ec. (19). Debido a la Ec. (24), $\zeta^{(r)}$ es sólo una función de las coordenadas espaciales. La única forma para que esto sea válido es

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} - \underline{\nabla} \cdot \left(-\underline{\nabla} \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{27}$$

y la Ec. (24) deviene

$$\underline{\omega} \phi - \omega_0 \underline{A} = 0 . \tag{28}$$

La Ec. (28) es la condición requerida para que las ecuaciones de la teoría ECE se reduzcan a las ecuaciones de Maxwell-Heaviside tal como se desarrollaron previamente [4]. La única suposición utilizada en este desarrollo fue que ϕ fuese separable en el producto de una función dependiente del espacio y una función dependiente del tiempo. Esta implicación, en virtud de que las derivadas espaciales y las temporales se utilizaron en forma extensiva, es que las variables de campo estén bien definidas (es decir, que las derivadas posean en todos lados un único valor).

Quedan por considerarse los efectos del potencial escalar, o que uno de los componentes del potencial vectorial magnético se vuelva igual a cero en algún punto en el espacio y tiempo, en términos de singularidades de potencial.

Consideremos $\phi = 0$ en la Ec. (5), y notemos que, por causa de la Ec. (18), o sea $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} = 0$, para que ello se cumpla deberá de suceder una de dos cosas.

i. $\underline{\nabla} \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = 0$ ó

ii. $\underline{\nabla} \phi, \underline{A}, \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$, y $\boldsymbol{\omega}$ son todos vectores paralelos.

El caso (i) puede rechazarse porque estamos efectuando la suposición implícita de que ϕ y $\boldsymbol{A}$ son de alguna manera independientes.

El caso (ii) significa que la Ec. (5) puede expresarse como

$$\lim_{\epsilon \to \infty} \left(\frac{0}{\epsilon} \right) \equiv 0.$$

Esto significa que no existe ninguna situación de singularidad provocada por el hecho de que ϕ se vuelva igual a cero.

Debido a la Ec. (3), existe la potencialidad de una singularidad cuando cualquier componente del potencial vectorial magnético es igual a cero. Tomemos, por ejemplo

$A_3 = 0$,

en algún punto en el espacio y en algún momento en el tiempo, teniendo los otros dos elementos de A valores finitos. Si los componentes de $\boldsymbol{\omega}$ permanecen con valores finitos, entonces la sustitución de esto en la Ec. (2) da

$$\omega_3 = \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \right).$$

Una ecuación similar puede escribirse con cada uno de los otros dos valores de A_i iguales a cero a su turno. Esto constituye tan sólo una afirmación de la ecuación de antisimetría magnética en dos dimensiones, y no presenta cuestiones de singularidad.

3. Discusión

Si el potencial escalar tradicional resulta separable, entonces el potencial vectorial es separable. Siendo éste el caso, las ecuaciones de la teoría ECE del electromagnetismo se reducen a aquellas de la teoría de Maxwell-Heaviside. Los efectos no maxwellianos pueden entonces sólo esperarse cuando el potencial escalar no puede expresarse como una función separable, lo cual no sucede frecuentemente. Ciertamente, esto surge a partir de los resultados experimentales, donde muy pocos efectos no maxwellianos han sido observados directamente en el campo de la ingeniería eléctrica.

Condición que podría disparar un evento no maxwelliano.

Hemos identificado muchas situaciones bajo las cuales el sistema ECE se vuelve maxwelliano y se ve forzado a permanecer allí debido a su naturaleza estable. Presentaremos ahora las condiciones para que se cumpla lo opuesto, es decir que el sistema ECE se vuelva un estado no maxwelliano, y que allí permanezca.

El hecho de que un estado del campo electromagnético sea maxwelliano, o no, antes de que "encendamos el interruptor" permanece abierto a la discusión. Supongamos lo peor, y consideremos que el estado es maxwelliano (o se ha vuelto maxwelliano a través de alguno de los mecanismos discutidos más arriba). Para alcanzar un estado ECE no maxwelliano, ninguno de los potenciales puede jamás ser igual a cero, ni tampoco pueden jamás volverse separables o continuos. Esto significa que el sistema debe de colocarse en un estado de potencial que es ya sea negativo o positivo, y que permanece en ese estado, y que los potenciales se vuelven discontinuos, provocando que su derivada adquiera múltiples valores, o quizás “cercanas al infinito”. Un potencial pulsado, con tiempos de incremento y colapso extremadamente cortos, por ejemplo, tendría esta propiedad. Un potencial con múltiples valores se relaciona en forma cercana con campos no conservativos de la teoría de campos. Tales campos pueden utilizarse para extraer energía, al alcanzar el mismo punto de definición a lo largo de diferentes caminos. Sin embargo, no resulta fácil encontrar semejantes campos en la naturaleza.

Referencias bibliográficas.

[1]. M. W. Evans, Generally Covariant Unified Field Theory (Abramis, 2005 en adelante), en siete volúmenes a la fecha.

[2]. M.W.Evans, H. Eckardt y D.W.Lindstrom, Antisymmetry constraints in the Engineering Model, Generally Covariant Unified Field Theory, Capítulo 12, Volumen 7, 2010.

[3]. H. Lichtenberg, Considerations on the Electro- and Magnetostatic ECE Equations, de libre acceso en el portal www.aias.us .

[4]. D. W. Lindstrom y H. Eckardt , Reduction of the ECE Theory of Electromagnetism to the Maxwell-Heaviside Theory, Generally Covariant Unified Field Theory, Capítulo 17, Volumen 7, 2010.

[5]. J. D. Jackson , Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, 1999.