# No linealidad en las ecuaciones ECE del Electromagnetismo - Parte I

**Douglas W. Lindstrom***, **Horst Eckardt**+

**Alpha Institute for Advanced Study (AIAS)**

**Mayo 5, 2013**

**Traducción: Alex Hill (www.et3m.net )**

## Resumen

Se han modificado las ecuaciones del modelo de campo de Einstein Cartan Evans, para un marco de referencia de Minkowski, a fin de incluir términos no lineales en las ecuaciones de campo, deducidas a partir de la primera identidad de Bianchi de la geometría de Cartan. Se demuestra que, en este caso, las definiciones e intensidad de campo no lineal provistas por la identidad de Cartan para la torsión, la primera ecuación estructural, también se comportan en una forma no lineal. Se proporciona el conjunto completo de ecuaciones para la teoría electromagnética no lineal ECE.

## 1. Introducción.

Los físicos (e ingenieros) a menudo toman sistemas de coordenadas, desplazan los orígenes, cambian las escalas de longitud, y utilizan toda clase de transformaciones de modificación para distorsionar los campos matemáticos en algo que les convenga para la ocasión. Estas funciones u operaciones de cambio se denominan transformaciones *gauge*, y los campos que resultan invariantes frente a estas operaciones se denominan *invariantes gauge* [1]. El electromagnetismo clásico tiene muchos ejemplos de esto. La teoría de campo ECE se ideó para que no fuese invariante gauge, debido a un vínculo inherente a un origen absoluto, o punto cero, para la tétrada usada para definir los campos. Esta información se obtuvo a partir de la ecuación de onda ECE [2]. Se mostrará que éste no es el caso para las ecuaciones de campo, que de hecho la primera ecuación estructural de Cartan, la base para relacionar funciones de intensidad de campo, tales como por ejemplo la fuerza de campo eléctrico y magnético, a potenciales de campo, se adapta a los cambios gauge. Luego se deduce una forma no lineal de las ecuaciones de campo al redefinir las densidades de carga y corriente ECE.

* e-mail: dlindstrom@gmail.com
+ e-mail: mail@horst-eckardt.de

**2. Transformación gauge**

Veamos primero el llamado punto ceropara un campo de Cartan.El tensor de torsión$T^{a}_{\mu\nu}$ de la geometría de Cartan viene dada por la primera ecuación estructural de Cartan [2]

$$T^{a}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu q^{a}{}_{\nu} - \partial_\nu q^{a}{}_{\mu} + \omega^{a}{}_{\mu b} q^{b}{}_{\nu} - \omega^{a}{}_{\nu b} q^{b}{}_{\mu} \tag{1}$$

con conexiones de espín $\omega^{a}{}_{\mu b}$. La tétrada de Cartan $q^{a}_{\mu}$ mapea un espacio-tiempo referenciado por el índice "$\mu$" a otro referenciado por el índice "$a$" . A menudo un espacio-tiempo se toma como plano (típicamente el de Minkowski), y el otro es un espacio-tiempo general. El segundo espacio-tiempo puede no tener una base ortonormal, etc. Nótese que la teoría electromagnética ECE existente se desarrolló empleando un sistema de coordenadas cíclico [2]. Supondremos que el espacio-tiempo del observador es un espacio-tiempo de Minkowski más adaptable a la computación, dado por los índices $\mu, \nu$.

Hay un estado no trivial para la tétrada de Cartan que existe cuando la torsión es igual a cero (que llamaremos el estado base). Se define mediante la misma conexión de espín $\omega^{a}{}_{\mu b}$ y condiciones de contorno que el estado con torsión, pero se encuentra libre de fuentes, sumideros, y otras influencias materiales.

Este estado, indexado por el suprafijo $(gnd)$ viene dado por lo siguiente

$$\partial_\mu q^{a(gnd)}{}_{\nu} - \partial_\nu q^{a(gnd)}{}_{\mu} + \omega^{a}{}_{\mu b} q^{b\,(gnd)}{}_{\nu} - \omega^{a}{}_{\nu b} q^{b\,(gnd)}{}_{\mu} = 0 \tag{2}$$

La Ec. (1) puede re-expresarse restando la Ec. (2) y definiendo una nueva tétrada, una medida a partir de una referencia distinta de cero;

$$Q^{a}{}_{\mu} = q^{a}_{\mu} - q^{a(gnd)}{}_{\mu} \tag{3}$$

para obtener

$$T^{a}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu Q^{a}{}_{\nu} - \partial_\nu Q^{a}{}_{\mu} + \omega^{a}{}_{\mu b} Q^{b}{}_{\nu} - \omega^{a}{}_{\nu b} Q^{b}{}_{\mu}. \tag{4}$$

Si uno permite que el potencial vectorial en un espacio de 4 dimensiones sea proporcional a $Q^{a}{}_{\nu}$ [2], resulta aparente que el estado de vacío se ha eliminado de consideración mediante un simple desplazamiento del punto cero. Resulta interesante notar que virtualmente todas las mediciones de campo, especialmente evidentes en electromagnetismo, se efectúan a partir del estado "base", que se toma como igual a cero. Se ha demostrado [3] que el estado de vacío dado por el electromagnetismo ECE, no es un estado cero sencillo, sino que es rico en funciones de onda longitudinales en potencial.

Una segunda transformación gauge, que se muestra en lo que sigue, permite eliminar la no linealidad de las ecuaciones (1) o (4). El teorema fundamental de formas [4], que conduce al desarrollo de geometrías denominadas cohomologías Rahm, de las cuales el espacio-tiempo de Minkowski es un ejemplo, establece que si la derivada exterior de una forma es igual a cero, entonces la forma es exacta. Este es el Lemma de Poincaré. En la notación de la geometría diferencial, la derivada exterior de una forma $A$ es cerrada cuando

$$dA = 0 \tag{5}$$

Por el Lemma de Poincaré, la forma es entonces exacta, dada por

$$d(dA) = 0 \tag{6}$$

ó

$$B = dA \tag{7}$$

donde B es una cantidad de campo derivada. Esto en esencia elimina los términos no lineales de la Ec. (1).

En geometría cartesiana, esto resulta equivalente a

si $\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{B} = \underline{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ (8)

y

si $\underline{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ entonces $\boldsymbol{A} = \underline{\nabla}\phi$ (9)

donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son vectores y $\phi$ es un escalar.

Para aquellos lectores sin experiencia con la geometría diferencial de Cartan, veamos la formulación vectorial de la primera ecuación estructural de Cartan, como se desarrolló para las ecuaciones electromagnéticas de la teoría ECE. El tensor de torsión, expresado en formato vectorial tridimensional deviene [5]

$$\boldsymbol{E}^a = -\underline{\nabla}\phi^a - \frac{\partial \boldsymbol{A}^a}{\partial t} - \omega^a_{0b}\boldsymbol{A}^b + \boldsymbol{\omega}^a_{\ b}\phi^b \ , \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B}^a = \underline{\nabla} \times \boldsymbol{A}^a - \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \times \boldsymbol{A}^b \ . \tag{11}$$

El superfijo "$a$" es la polarización del campo electromagnético, cuando el modelo establecido de la física describe esto como un único valor, y por ello no se muestra. $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}}$ y $\phi^a$ son los potenciales vectorial y escalar para cada polarización. $\boldsymbol{E}^a$ y $\boldsymbol{B}^a$ son las intensidades de campo eléctrico y de inducción y $\omega^a_{\ 0b}$ y $\boldsymbol{\omega}^a_{\ b}$ son las conexiones de espín escalar y vectorial, respectivamente. Las leyes de Faraday y de Gauss se deducen de la identidad de Bianchi, que está en forma vectorial:

$$\underline{\nabla} \times \boldsymbol{E}^a + \frac{\partial \boldsymbol{B}^a}{\partial t} = 0 \ , \tag{12}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}^a = 0 \ . \tag{13}$$

A primera vista, el aspecto de los potenciales con términos absolutos en (10) y (11), a diferencia de las derivadas espaciales y temporales como en la formulación tradicional, sugeriría que estas definiciones no pueden someterse a *regauging*. Sin embargo, la aplicación de la Ley de Gauss dada por la Ec. (13) a la definición de la intensidad de campo de la Ec. (11) muestra que

$$\underline{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \times \boldsymbol{A}^b) = \boldsymbol{0} \tag{14}$$

y utilizando resultados conocidos del cálculo vectorial, la Ec. (8), tenemos

$$\boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \times \boldsymbol{A}^b = \underline{\nabla} \times \boldsymbol{F}^a \tag{15}$$

con un nuevo campo $\boldsymbol{F}^a$**.** Sustituyendo esto, y la Ec. (10) a la Ley de Faraday de la Ec. (12) da

$$\underline{\nabla} \times \left( -\underline{\nabla}\phi^a - \frac{\partial \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}}}{\partial t} - \omega^a_{\ 0b}\boldsymbol{A}^b + \boldsymbol{\omega}^a_{\ b}\phi^b \right) + \frac{\partial\left(\underline{\nabla}\times\boldsymbol{A}^a - \underline{\nabla}\times\boldsymbol{F}^a\right)}{\partial t} = 0$$

que se simplifica a

$$\underline{\nabla} \times \left( -\omega^a_{0b}\boldsymbol{A}^b + \boldsymbol{\omega^a_b}\phi^b - \frac{\partial \boldsymbol{F}^a}{\partial t} \right) = 0 \ . \tag{16}$$

Usando una vez más conceptos conocidos de cálculo vectorial dados por la Ec. (9), expresamos

$$-\omega^a_{0b}\boldsymbol{A}^b + \boldsymbol{\omega^a_b}\phi^b - \frac{\partial \boldsymbol{F}^a}{\partial t} = \underline{\nabla}\psi^a \tag{17}$$

introduciendo un nuevo potencial escalar $\psi^a$. Si cambiamos variables y escribimos

$$\Phi^a = \phi^a - \psi^a \tag{18}$$

y

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^a = \boldsymbol{A^a} - \boldsymbol{F}^a \ , \tag{19}$$

de inmediato uno tiene para las Ecs.(10) y (11), representaciones modificadas de las intensidades de campo,

$$\boldsymbol{E}^a = -\underline{\nabla}\Phi^a - \frac{\partial \mathcal{A}^a}{\partial t} \quad , \tag{20}$$

$$\boldsymbol{B}^a = \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}^a \ . \tag{21}$$

Estas tienen la misma forma que las definiciones del modelo establecido para los campos eléctrico y magnético. Mediante transformaciones matemáticamente aceptables, los elementos de campo no lineales inherentes en la primera ecuación estructural desaparecen cuando se expresan utilizando matemática vectorial convencional, para cualquier grado de polarización considerado si el lado derecho de las Ecs.(12) y (13) son iguales a cero.

## 3. Ecuaciones de campo no lineales.

Ahora mostraremos cómo los términos no lineales pueden hallarse en las ecuaciones de campo ECE, deducidas a partir de la identidad de Bianchi de la geometría de Cartan. En forma indiciada, esta identidad es [2]

$$\partial_\mu T^{a\mu\nu} + \omega^a{}_{\mu b} T^{b\mu\nu} = R_\mu{}^{a\mu\nu} \ , \tag{22}$$

$R_{\mu}{}^{a\sigma\nu}$ es el tensor de curvatura de Cartan.

Éste y su equivalente ecuación del dual de Hodge [2]

$$\partial_{\mu}\tilde{T}^{a\mu\nu} + \omega^{a}{}_{\mu b}\tilde{T}^{b\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu}{}^{a\mu\nu} \tag{23}$$

define las ecuaciones de campo ECE.

La corriente inhomogénea $j_{I}^{a\nu}$ hasta ahora se ha definido como

$$j_{I}^{a\nu} = R_{\mu}{}^{a\mu\nu} - \omega^{a}{}_{\mu b}T^{a\mu\nu} \tag{24}$$

resultando en un conjunto de ecuaciones de campo lineales

$$\partial_{\mu}T^{a\mu\nu} = j_{I}^{a\nu} \ . \tag{25}$$

Las ecuaciones de campo homogéneas correspondientes, un resultado de la Ec.(23), son

$$\partial_{\mu}\tilde{T}^{a\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu}{}^{a\mu\nu} - \omega^{a}{}_{\mu b}\tilde{T}^{a\mu\nu} = j_{H}^{a\nu} \approx 0 \tag{26}$$

donde $j_{H}^{a\nu}$ es la corriente homogénea, dada experimentalmente como cero o muy cercano a ello. Para una única polarización, éstas son las ecuaciones de campo del modelo establecido, y son completamente lineales.

Si re-definimos las corrientes de las Ecs (25) y (26) por

$$j_{I}^{a\nu} = R_{\mu}{}^{a\mu\nu} \tag{27}$$

y

$$j_{H}^{a\nu} = \tilde{R}_{\mu}{}^{a\mu\nu} \approx 0 \ , \tag{28}$$

las ecuaciones de campo devienen

$$\partial_{\mu}T^{a\mu\nu} + \omega^{a}{}_{\mu b}T^{b\mu\nu} = R_{\mu}{}^{a\mu\nu} = j_{I}^{a\nu} \tag{29}$$

y su dual de Hodge

$$\partial_{\mu}\tilde{T}^{a\mu\nu} + \omega^{a}{}_{\mu b}\tilde{T}^{b\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu}{}^{a\mu\nu} = j_{H}^{a\nu} \approx 0 \ . \tag{30}$$

Utilizando métodos desarrollados y presentados anteriormente [5], las Ecs. (29) y (30) dan ecuaciones de campo electromagnético no lineales como (ver Apéndice I)

$$\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}^a - \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \cdot \boldsymbol{B}^b = 0 \,, \tag{31}$$

$$\underline{\nabla} \times \boldsymbol{E}^a + \frac{\partial \boldsymbol{B}^a}{\partial t} + \omega^a_{0\ b} \boldsymbol{B}^b - \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \times \boldsymbol{E}^b = 0 \,, \tag{32}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}^a - \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \cdot \boldsymbol{D}^b = \rho^a \,, \tag{33}$$

$$\underline{\nabla} \times \boldsymbol{H}^a - \frac{\partial \boldsymbol{D}^a}{\partial t} - \omega^a_{0\ b} \boldsymbol{D}^b - \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \times \boldsymbol{H}^b = \boldsymbol{J}^a \,. \tag{34}$$

$\boldsymbol{D}^a$ es el desplazamiento eléctrico y $\boldsymbol{H}^a$ es la intensidad de campo magnético.

Estas ecuaciones son ricas en no linealidades, que también aparecen en las ecuaciones de onda correspondientes. Para ver la naturaleza ondulatoria de estas equaciones en el espacio libre, se escribe

$$\boldsymbol{B}^a = \mu_0 \boldsymbol{H}^a \,, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{D}^a = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^a \tag{36}$$

donde $\mu_0, \varepsilon_0$ son, respectivamente, la permeabilidad y permitividad del espacio libre.

Como en teoría electromagnética tradicional [6] luego de un extenso análisis vectorial (ver Apéndice II) obtenemos las ecuaciones acopladas no lineales

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}^a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \omega^a_{0\ b} \boldsymbol{E}^b}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}^a}{\partial t^2} - \underline{\nabla}\, \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \cdot \boldsymbol{E}^b + \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{B}^b - \underline{\nabla} \times \omega^a_{0\ b} \boldsymbol{B}^b = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}^a}{\partial t} + \frac{\underline{\nabla}\rho}{\varepsilon_0} \,, \tag{37}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B}^a + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\omega^a_{0\ b} \boldsymbol{B}^b)}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}^a}{\partial t^2} - \underline{\nabla} \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \cdot \boldsymbol{B}^b + \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \times \boldsymbol{B}^b + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b)}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \underline{\nabla} \times \omega^a_{0\ b} \boldsymbol{E}^b = -\mu_0 \underline{\nabla} \times \boldsymbol{J}^a \,. \tag{38}$$

Estas dos ecuaciones vectoriales junto con las definiciones (10) y (11) resultan insuficientes para dar una solución completa. Las ecuaciones de antisimetría ECE [5] ofrecen restricciones adicionales para ayudar a completar la solución. Estas ecuaciones para el electromagnetismo ECE son

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^a}{\partial t} - \underline{\nabla} \phi^a + \omega^a_{0b} \boldsymbol{A}^b + \boldsymbol{\omega}^a_b \phi^b = 0 \,, \tag{39}$$

$$\frac{\partial A^a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A^a_j}{\partial x_i} + \omega^a_{ib} A^b_j + \omega^a_{jb} A^b_i = 0 \,. \tag{40}$$

La Ec. (39) se expresa en formato vectorial tradicional. La Ec. (40) no puede expresarse en formato vectorial utilizando operadores vectoriales tradicionales. Sugerimos la siguiente alternativa, "más suave". A partir del postulado de la tétrada de la geometría de Cartan, la conexión para una dada "$a$" viene dada por [2]

$$\Gamma^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu q^a{}_\nu + \omega^a{}_{\mu b} q^b{}_\nu. \tag{41}$$

La traza de una matriz antisimétrica es igual a cero, en cualquier marco. Aplicando esto a los índices $\mu, \nu$, vemos

$$\partial_\mu q^a{}_\mu + \omega^a{}_{\mu b} q^a{}_\mu = 0 \qquad \textit{sumada sobre } \mu = 0,1,2,3 \qquad . \tag{42}$$

Aplicada a la porción electromagnética de la teoría ECE, esto deviene

$$\partial_\mu A^a_\mu + \omega^a_{\mu b}\, A^b_\mu = 0 \quad \textit{sumada sobre } \mu = 0,1,2,3\ . \tag{43}$$

En forma vectorial es

$$-\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}^a + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^a}{\partial t} + \omega^a_{0b}\phi^b + \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{A}^b = 0 \tag{44}$$

Las Ecs. (39) y (44) suman 4 ecuaciones al sistema, que en principio resulta suficiente para especificar una solución completa.

Notamos al pasar que la divergencia de (39) sumada a la derivada temporal de (44) da

$$-\nabla^2\phi^a + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi^a}{\partial t^2} + \frac{\partial\left(\omega^a_{0\,b}\phi^b + \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{A}^b\right)}{\partial t} + \underline{\nabla\cdot}\,(\omega^a_{0\,b}\boldsymbol{A}^b + \boldsymbol{\omega}^a_{\boldsymbol{b}} \cdot \phi^b) = 0 \tag{45}$$

**4. Conclusiones**

El sistema de ecuaciones provisto por (10), (11), (31-36 ó 37-38), (39) y (44 ó 45) constituyen el conjunto completo de ecuaciones para la teoría electromagnética ECE. En la parte II de este documento, se proveerá una reducción en el número de ecuaciones de este conjunto, volviendo a las soluciones numéricas mucho más factibles. También se proveerán ejemplos de soluciones, y se propondrán ensayos experimentales.

**Apéndice I**

**Ecuaciones homogéneas**

Comenzamos con el Dual de Hodge de la primera identidad de Bianchi,

$$\partial_\mu \tilde{T}^{a\mu\nu} + \omega^a{}_{\mu b} \tilde{T}^{b\mu\nu} \approx 0 \ . \tag{1-1}$$

El electromagnetismo se asocia con esta ecuación al definir el tensor eléctrico como

$$F^{b\mu\nu} = A^{(0)} T^{b\mu\nu} \tag{1-2}$$

donde $A^{(0)}$ es una constante universal que relaciona la geometría al campo electromagnético físico

y

$$\tilde{F}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a{}_{\rho\sigma} \tag{1-3}$$

es el dual de Hodge del tensor electromagnético [5].

En forma matricial, el tensor de campo antisimétrico viene dado por [5]

$$\tilde{F}^{a\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ & 0 & \frac{E^3}{c} & \frac{-E^2}{c} \\ & & 0 & \frac{E^1}{c} \\ & & & 0 \end{bmatrix}^a \ . \tag{1-4}$$

En forma vectorial, siguiendo [1,2,5]

$$\partial_\mu \rightarrow \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \underline{\nabla} \right) , \tag{1-5}$$

$$\omega^a{}_{\mu b} \rightarrow \left( \frac{\omega^a_{0\,b}}{c}, -\boldsymbol{\omega}^a_b \right) \ . \tag{1-6}$$

Para $\nu = 0$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{a10} + \left( -\omega^a_{\mu\,b} \right) \tilde{F}^{b\mu 0} \approx 0 \quad \text{for} \quad \mu = 1,2,3. \tag{1-7}$$

Dada la antisimetría de $\tilde{F}^{a\mu\nu}$ esto es

$$\partial_\mu \tilde{F}^{a01} + \left(-\omega^a_{\mu\,b}\right)\tilde{F}^{b0\mu} \approx 0 \quad \text{for} \quad \mu = 1,2,3. \qquad (1\text{-}8)$$

Utilizando la Ec.(1-4) esto entonces deviene

$$\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}^a - \boldsymbol{\omega}^a_b \cdot \boldsymbol{B}^b = 0\,. \qquad (1\text{-}9)$$

Para $\nu = 1$,

$$\partial_0\left(\tilde{F}^{a01}\right) + \left(\frac{\omega^a_{0\,b}}{c}\right)\left(\tilde{F}^{b01}\right) + \partial_2\left(\tilde{F}^{a21}\right) + (-\omega^a_{2\,b})\tilde{F}^{b21} + \partial_3\tilde{F}^{a31} + (-\omega^a_{3\,b})\tilde{F}^{b31} \approx 0\,,$$

utilizando la antisimetría y (1-4), esto deviene

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-B^{a1}) + \left(\frac{\omega^a_{0\,b}}{c}\right)(-B^{b1}) + \partial_2\left(-\frac{E^{a3}}{c}\right) + (-\omega^a_{2\,b})\left(-\frac{E^{b3}}{c}\right) + \partial_3\left(-\frac{-E^{a2}}{c}\right) + (-\omega^a_{3\,b})\left(-\frac{-E^{b2}}{c}\right) \approx 0$$

ó

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(B^{a1}) + \left(\frac{\omega^a_{0\,b}}{c}\right)(B^{a1}) + \partial_2\left(\frac{E^{a3}}{c}\right) - \partial_3\left(\frac{E^{a2}}{c}\right) - (\omega^a_{2\,b})\left(\frac{E^{b3}}{c}\right) + (\omega^a_{3\,b})\left(\frac{E^{b2}}{c}\right) \approx 0\,.$$

Esto se generaliza a

$$\underline{\nabla} \times \boldsymbol{E}^a + \frac{\partial \boldsymbol{B}^a}{\partial t} + \omega^a_{0\,b}\boldsymbol{B}^b - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b = 0 \qquad (1\text{-}10)$$

**Ecuaciones inhomogéneas**

La ecuación de campo inhomogénea es la forma electromagnética de la primera identidad de Bianchi,

$$\partial_\mu T^{a\sigma\nu} + {\omega^a}_{\sigma b} T^{b\sigma\nu} = j_I^{a\nu}\,. \qquad (1\text{-}11)$$

Ahora, el tensor de campo electromagnético viene dado por

$$G^{a\sigma\nu} = \Xi^{a\sigma\nu}{}_{\rho\lambda} F^{a\rho\lambda} \qquad (1\text{-}12)$$

donde $\Xi^{a\sigma\nu}{}_{\rho\lambda}$ es el cuatro tensor de permeabilidad-permitividad del espacio.

Para un material isotrópico,

$$G^{a\sigma 0} = \varepsilon F^{a\sigma 0} \quad \text{para } \nu = 0,\ \sigma = 1,2,3 \qquad (1\text{-}13)$$

$$G^{a\sigma\nu} = \mu F^{a\sigma\nu} \quad \text{para } \sigma, \nu = 1,2,3. \tag{1-14}$$

Obtenemos así

$$\partial_\mu G^{a\sigma\nu} + \omega^a{}_{\sigma b} G^{b\sigma\nu} = j_I^{a\nu} \, . \tag{1-15}$$

En forma matricial

$$G^{a\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ & 0 & \frac{-H^3}{c} & \frac{H^2}{c} \\ & & 0 & \frac{-H^1}{c} \\ & & & 0 \end{bmatrix}^a . \tag{1-16}$$

Además de (1-5) y (1-6) tenemos

$$J^a = \left(\rho^a, \frac{\boldsymbol{J}^a}{c}\right) \tag{1-17}$$

Para $\nu = 0$, la Ec.(1-15) deviene

$$\partial_\sigma G^{a\sigma 0} + \omega^a{}_{\sigma b} G^{b\sigma 0} = j_I^{a0} \, .$$

que deviene, al utilizar (1-16) y antisimetría,

$$\partial_\sigma (D^{a\sigma 0}) + (-\omega^a_{\sigma b})(D^{b\sigma 0}) = \rho^a.$$

Generalizando, esto es

$$\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}^a - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{D}^b = \rho^a \, . \tag{1-18}$$

Para $\nu = 1$, la Ec.(1-15) deviene

$$\partial_0 G^{a01} + \omega^a{}_{0b} G^{b01} + \partial_2 G^{a21} + (-\omega^a{}_{2b}) G^{b21} + \partial_3 G^{a31} + (-\omega^a{}_{3b}) G^{b31} = j_I^{a1}$$

que da

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-D^{a1}) + \left(\frac{\omega^a_{0\,b}}{c}\right)(-D^{b1}) + \partial_2\left(\frac{H^{a3}}{c}\right) + (-\omega^a_{2\,b})\left(\frac{H^{b3}}{c}\right) + \partial_3\left(\frac{-H^{a2}}{c}\right) + (-\omega^a_{3\,b})\left(-\frac{-H^{b2}}{c}\right) \approx \frac{J^{a1}}{c}$$

ó

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(D^{a1}) + \left(\frac{\omega^{a}_{0\ b}}{c}\right)(D^{b1}) - \partial_2\left(\frac{H^{a3}}{c}\right) + \partial_3\left(\frac{H^{a2}}{c}\right) + (\omega^{a}_{2\ b})\left(\frac{H^{b3}}{c}\right) - (\omega^{a}_{3\ b})\left(\frac{H^{b2}}{c}\right) \approx \frac{J^{a1}}{c} .$$

Esto se generaliza a

$$\underline{\nabla} \times \boldsymbol{H}^{a} - \frac{\partial \boldsymbol{D}^{a}}{\partial t} - \omega^{a}_{0\ b}\boldsymbol{D}^{b} - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{H}^{b} = \boldsymbol{J}^{a} . \qquad (1\text{-}19)$$

**Apéndice II**

A partir de las Ecs. (31)–(36)

$$\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}^a - \boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \cdot \boldsymbol{B}^b = 0 \ , \qquad (2\text{-}1)$$

$$\underline{\nabla} \times \boldsymbol{E}^a + \frac{\partial \boldsymbol{B}^a}{\partial t} + \omega^a_{0\ b}\boldsymbol{B}^b - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b \ = 0 \ , \qquad (2\text{-}2)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^a \ - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{E}^a \ = \frac{\rho^a}{\varepsilon_0} \ , \qquad (2\text{-}3)$$

$$\underline{\nabla} \times \boldsymbol{B}^a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}^a}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\omega^a_{0\ b}\boldsymbol{E}^b - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{B}^b = \mu_0 \boldsymbol{J}^a \ . \qquad (2\text{-}4)$$

Tomado el Rotor de ((2-2)

$$\underline{\nabla} \times \left(\underline{\nabla} \times \boldsymbol{E}^a\right) + \underline{\nabla} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}^a}{\partial t} + \underline{\nabla} \times \omega^a_{0\ b}\boldsymbol{B}^b - \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b \ = 0 \ .$$

Esto se expande, utilizando la conocida identidad vectorial para el doble rotor,

$$\underline{\nabla} \times \left(\underline{\nabla} \times \boldsymbol{A}\right) = -\nabla^2 A + \underline{\nabla}\,\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$$

y la derivada tempoal de (2-4),

$$-\nabla^2\boldsymbol{E}^a + \underline{\nabla}\,\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^a + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}^a}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\omega^a_{0\ b}\boldsymbol{E}^b + \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{B}^b + \mu_0 \boldsymbol{J}^a\right) + \underline{\nabla} \times \omega^a_{0\ b}\boldsymbol{B}^b - \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b \ = 0 \ .$$

Utilizando Ec.(2-3) para $\underline{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^a$ esto deviene

$$-\nabla^2\boldsymbol{E}^a + \underline{\nabla}\left(\boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \cdot \boldsymbol{E}^b + \frac{\rho^a}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}^a}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\omega^a_{0\ b}\boldsymbol{E}^b + \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{B}^b + \mu_0 \boldsymbol{J}^a\right) + \underline{\nabla} \times \omega^a_{0\ b}\boldsymbol{B}^b - \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b \ = 0 \ .$$

Reordenando términos

$$\nabla^2\boldsymbol{E}^a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \omega^a_{0\ b}\boldsymbol{E}^b}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}^a}{\partial t^2} - \underline{\nabla}\,\boldsymbol{\omega}^a_{\ b} \cdot \boldsymbol{E}^b + \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{E}^b - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{B}^b - \underline{\nabla} \times \omega^a_{0\ b}\boldsymbol{B}^b \ = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}^a}{\partial t} + \frac{\nabla\rho}{\varepsilon_0} \ . \qquad (2\text{-}5)$$

Similarmente, tomando el Rotor de (2-4)

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \boldsymbol{B}^a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\nabla} \times \boldsymbol{E}^a}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\underline{\nabla} \times \omega^a_{0\ b}\boldsymbol{E}^b - \underline{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\ \boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{B}^b = \mu_0 \underline{\nabla} \times \boldsymbol{J}^a \ . \qquad (2\text{-}6)$$

Expandiendo el doble rotor y la Ec. (2-2)para $\underline{\nabla} \times \boldsymbol{E}^a$ da

$$-\nabla^2\boldsymbol{B}^a + \underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}^a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}^a}{\partial t} - \omega^a_{0\,b}\boldsymbol{B}^b + \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}\times\boldsymbol{E}^b\right)}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\underline{\nabla}\times\omega^a_{0\,b}\boldsymbol{E}^b - \underline{\nabla}\times\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}\times\boldsymbol{B}^b = \mu_0\underline{\nabla}\times\boldsymbol{J}^a\,.$$

Utilizando (2-1)

$$-\nabla^2\boldsymbol{B}^a + \underline{\nabla}\boldsymbol{\omega}^a_{\ b}\cdot\boldsymbol{B}^b + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}^a}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(\omega^a_{0\,b}\boldsymbol{B}^b - \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}\times\boldsymbol{E}^b\right)}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\underline{\nabla}\times\omega^a_{0\,b}\boldsymbol{E}^b - \underline{\nabla}\times\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}\times\boldsymbol{B}^b = \mu_0\underline{\nabla}\times\boldsymbol{J}^a$$

o mediante reordenación

$$\nabla^2\boldsymbol{B}^a + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(\omega^a_{0\,b}\boldsymbol{B}^b\right)}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}^a}{\partial t^2} - \underline{\nabla}\boldsymbol{\omega}^a_{\ b}\cdot\boldsymbol{B}^b + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}\times\boldsymbol{E}^b\right)}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\underline{\nabla}\times\omega^a_{0\,b}\boldsymbol{E}^b + \underline{\nabla}\times\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}\times\boldsymbol{B}^b = -\mu_0\underline{\nabla}\times\boldsymbol{J}^a\,. \quad (2\text{-}7)$$

**Referencias**


[1] John David Jackson, Classical Electrodynamics-3rd. ed., (John Wiley and Sons, 1999)

[2] M. W. Evans, Generally Covariant Unified Field Theory, (Abramis Suffold, 2005 y sigs) Vol. 1-7 (ver www.aias.us, sección de documentos de la serie UFT ).

[3] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom, Generally Covariant Unified Field Theory, (Abramis Suffold, 2005 y sigs) Vol .7, Ch.16 (ver www.aias.us)

[4] Steven H. Weintraub, Differential Forms, Academic Press, 1997

[5] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom, Generally Covariant Unified Field Theory, (Abramis Suffold, 2005 en adel.) Vol .7 Ch.9-12, (ver www.aias.us, UFT 130 y sigs)

[6] J. R. Reitz, F. J. Milford, Foundations of Electromagnetic Theory-2nd. ed., (Addison Wesley 1996