Acerca de conexiones del tensor de torsión anti-simétrico y totalmente antisimétrico.

D. Lindstrom, H. Eckardt, M. W. Evans
Agosto 5, 2016
Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Basados solamente en la compatibilidad de la métrica en general, se muestra que la conexión de Christoffel $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ no es anti-simétrica en sus dos últimos índices. Los elementos de la conexión de Christoffel pueden computarse a partir del postulado de la tétrada, pero no están definidos en forma única. Lo mismo se cumple para símbolos de Christoffel de un tensor de torsión totalmente anti-simétrico. Los elementos no-diagonales de la métrica del espaciotiempo deben restringirse a una forma especial que permita el cumplimiento del postulado de la tétrada. Mediante restricciones adicionales es posible obtener conexiones de Christoffel anti-simétricas en los términos no-diagonales, pero con elementos diagonales no nulos. También se muestra que, para una torsión totalmente anti-simétrica, si la conexión es anti-simétrica en dos índices cualesquiera, entonces es totalmente anti-simétrica.

1. Introducción

En este documento investigamos la simetría de los símbolos de Christoffel. Se mostró en varios artículos de la teoría ECE [1]-[3] que los símbolos no pueden ser simétricos en sus dos últimos índices. Esto se asumió en relatividad einsteiniana, pero lleva a contradicciones inescapables. Por ejemplo, la identidad de Bianchi no resulta en una suma cero para los términos de curvatura, pero exhibe derivadas de términos de torsión del lado derecho. O sea que la curvatura es inseparable de la torsión en general. La forma más general de los símbolos de Christoffel es, entonces, asimétrica en sus dos últimos índices. Se verán casos especiales en este documento. En geometría de Cartan, el tensor de torsión se define como anti-simétrico en sus dos últimos índices. Como restricción adicional, el tensor de torsión totalmente anti-simétrico tiene las siguientes anti-simetrías:

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = -T^{\rho}{}_{\nu\mu} \tag{1}$$

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = -T^{\mu}{}_{\rho\nu} \tag{2}$$

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = -T^{\nu}{}_{\mu\rho} \tag{3}$$

Cualesquiera dos de las anti-simetrías automáticamente implican la tercera. Por ejemplo, si suponemos las anti-simetrías de las Ecs.(1) y (2), entonces

$$\mathrm{T}^{\nu}{}_{\mu\rho} = -\mathrm{T}^{\nu}{}_{\rho\mu} = \mathrm{T}^{\rho}{}_{\nu\mu} = -\mathrm{T}^{\rho}{}_{\mu\nu} \ . \tag{4}$$

Esto se cumple para cualesquiera dos de las tres anti-simetrías.

2. Deducción de la Expresión de Jensen para los símbolos de Christoffel con torsión.

La conocida relación entre los símbolos simétricos de Christoffel y la métrica es [4]

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) . \tag{5}$$

Supongamos ahora conexiones con simetría arbitraria. Entonces esta fórmula no es válida y debemos comenzar a partir de las ecuaciones con compatibilidad métrica, como en [5]:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\upsilon} g_{\lambda\varrho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\upsilon}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0. \tag{8}$$

Restamos (7) y (8) de (6):

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0. \tag{9}$$

Aplicamos la definicion de torsión:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} + (\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}) g_{\rho\lambda} = 0. \tag{10}$$

Sumamos $-2\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}$ a ambos lados y aplicamos otra vez torsión:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} = -2\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \ . \tag{11}$$

Evaluamos ahora el bajado de índices por la métrica:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \mathrm{T}_{\nu\mu\rho} + \mathrm{T}_{\mu\nu\rho} - \mathrm{T}_{\rho\mu\nu} = -2\Gamma_{\rho\mu\nu} \ . \tag{12}$$

Elevamos el primer índice de $\Gamma_{\rho\mu\nu}$ multiplicando con $g^{\rho\sigma}$ y por -1:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - T_{\nu\mu\rho} - T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} \right) \; . \tag{13}$$

Este es el resultado de Carroll [5] con términos de torsión adicionales. La ecuación correspondiente de Jensen [6] queda expresada como:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - T_{\mu\nu\sigma} - T_{\nu\mu\sigma} + T_{\sigma\mu\nu} \right) \; . \tag{14}$$

Esta es igual al resultado de la Ec. (13), al intercambiar los índices ρ y σ.

3. Consecuencias de una torsión anti-simétrica.

No se empleará la convención de sumatoria de Einstein en la discusión que sigue. Luego se verá que índices repetitivos aparecerán donde no se implica una sumatoria, lo cual genera una posible confusión.

Invirtiendo μ y ν en la Ec. (14) nos da

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}} - T_{\nu\mu\sigma} - T_{\mu\nu\sigma} + T_{\sigma\nu\mu} \right) . \tag{15}$$

Sumando las Ecs. (14) y (15) resulta en

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial (g_{\sigma\nu} + g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial (g_{\mu\sigma} + g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial (g_{\mu\nu} + \partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}} - T_{\mu\nu\sigma} - T_{\nu\mu\sigma} + T_{\sigma\mu\nu} - T_{\nu\mu\sigma} - T_{\mu\nu\sigma} + T_{\sigma\nu\mu} \right) \tag{16a}$$

que se reduce a

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial (g_{\sigma\nu} + g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial (g_{\mu\sigma} + g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial (g_{\mu\nu} + \partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}} - 2T_{\mu\nu\sigma} - 2T_{\nu\mu\sigma} + T_{\sigma\mu\nu} + T_{\sigma\nu\mu} \right) \; . \tag{16b}$$

Restando la Ec. (15) de la Ec. (14) da

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}} - T_{\mu\nu\sigma} - T_{\nu\mu\sigma} + T_{\sigma\mu\nu} + T_{\nu\mu\sigma} + T_{\mu\nu\sigma} - T_{\sigma\nu\mu} \right) \tag{16c}$$

que al reunir términos iguales deviene

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial (g_{\sigma\nu} - g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial (g_{\mu\sigma} - g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial (g_{\mu\nu} - \partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}} + T_{\sigma\mu\nu} - T_{\sigma\nu\mu} \right) . \tag{17}$$

La torsión viene dada por [5],

$$\mathrm{T}^{c}{}_{ab} = \Gamma^{c}{}_{ab} - \Gamma^{c}{}_{ba} \,, \tag{18}$$

y se ve fácilmente que es anti-simétrica en los índices

a y b. Nótese que

$$\mathrm{T}^{c}{}_{\mu\nu} = \mathrm{T}^{c}{}_{ab} q^{a}{}_{\mu}\, q^{b}{}_{\nu} \tag{19}$$

donde $q^{a}{}_{\mu}$ y $q^{b}{}_{\nu}$ son elementos de la tétrada de Cartan; si se aplica la Ec. (19) a la Ec. (18), se ve que el tensor $\mathrm{T}^{c}{}_{\mu\nu}$ es anti-simétrico en μ y ν. Más aun, dado que

$$\mathrm{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \mathrm{T}^{c}{}_{\mu\nu} q^{\lambda}{}_{c} \,, \tag{20}$$

vemos que $\mathrm{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ es anti-simétrico en μ y ν. Escribiendo

$$T_{\sigma\mu\nu} = \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} \tag{21}$$

se ve que el tensor $T_{\sigma\mu\nu}$ también es anti-simétrico en μ y ν , o sea

$$T_{\sigma\mu\nu} = -T_{\sigma\nu\mu}. \tag{22}$$

Con esta anti-simetría, la Ec. (17) deviene

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial(g_{\sigma\nu} - g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial(g_{\mu\sigma} - g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial(g_{\mu\nu} - \partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}} + 2T_{\sigma\mu\nu}\right). \tag{23}$$

Como la métrica es simétrica, la Ec.(23) se simplifica a la definición de torsión

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\, T_{\sigma\mu\nu} = \mathrm{T}^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{24}$$

como se esperaría. Si la métrica no fuese simétrica, esto no sería compatible con la definición de torsión.

Notando la anti-simetría de la Ec. (22), la Ec. (16b) deviene

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial(g_{\sigma\nu} + g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial(g_{\mu\sigma} + g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial(g_{\mu\nu} + \partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}} - 2T_{\mu\nu\sigma} - 2T_{\nu\mu\sigma}\right). \tag{25}$$

Notando que

$$T_{\mu\nu\sigma} = \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\nu\sigma} g_{\lambda\mu} = \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\right) g_{\lambda\mu} \,, \tag{26}$$

$$T_{\nu\mu\sigma} = \mathrm{T}^{\lambda}{}_{\mu\sigma} g_{\lambda\nu} = \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\right) g_{\lambda\nu} \,, \tag{27}$$

la Ec. (25) deviene

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial(g_{\sigma\nu}+g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial(g_{\mu\sigma}+g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial(g_{\mu\nu}+\partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}} - 2(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu})g_{\lambda\mu} \;- 2(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu})g_{\lambda\nu}\;\right) \tag{28}$$

Si expandimos la sumatoria, esto deviene

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial(g_{\sigma\nu}+g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial(g_{\mu\sigma}+g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial(g_{\mu\nu}+\partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}}\right) - \left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}\right) - \left(\Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} - \Gamma_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu}\right) \tag{29}$$

que puede reordenarse a

$$\left(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\right) + \left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho}\right) - \left(\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + \Gamma_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial(g_{\sigma\nu}+g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial(g_{\mu\sigma}+g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial(g_{\mu\nu}+\partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}}\right). \tag{30}$$

Dado que la métrica del espaciotiempo es simétrica, la Ec. (30) se reduce a

$$\left(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\right) + \left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho}\right) - \left(\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + \Gamma_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu}\right) = \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right). \tag{31}$$

Esta es la generalización de (5) incluyendo la torsión.

4. Torsión totalmente anti-simétrica.

Supongamos que, además de la anti-simetría de la Ec.(22), suponemos

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = -T^{\mu}{}_{\rho\nu} \tag{32}$$

o, en forma equivalente

$$T_{\rho\mu\nu} = -T_{\mu\rho\nu}\ . \tag{33}$$

Este tensor de torsión se llama totalmente anti-simétrico. Ahora la Ec. (25) deviene

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial(g_{\sigma\nu}+g_{\nu\sigma})}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial(g_{\mu\sigma}+g_{\sigma\mu})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial(g_{\mu\nu}+\partial g_{\nu\mu})}{\partial x^{\sigma}}\right). \tag{34}$$

Comparando las Ecs.(30) y (34) vemos que

$$\left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho}\right) = \left(\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + \Gamma_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu}\right). \tag{35}$$

De acuerdo con el conocimiento de los autores, esto constituye una nueva ecuación restrictiva sobre la conexión de Christoffel para un tensor de torsión totalmente anti-simétrico.

Nótese que la Ec. (35) puede expresarse como

$$\Sigma_\lambda g^{\rho\lambda}\left(\left(\Gamma_{\mu\nu\lambda}+\Gamma_{\nu\mu\lambda}\right)-\left(\Gamma_{\mu\lambda\nu}+\Gamma_{\nu\lambda\mu}\right)\right)=0 \tag{36}$$

Si, p.ej., puede demostrarse que la conexión es anti-simétrica en un par de índices, tal como

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}+\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}=0 \tag{37}$$

entonces

$$\Sigma_\lambda g^{\rho\lambda}\left(\left(\Gamma_{\mu\nu\lambda}+\Gamma_{\nu\mu\lambda}\right)+\left(\Gamma_{\mu\nu\lambda}+\Gamma_{\nu\mu\lambda}\right)\right)=0 \tag{38}$$

ó

$$\Sigma_\lambda g^{\rho\lambda}\left(\Gamma_{\mu\nu\lambda}+\Gamma_{\nu\mu\lambda}\right)=0 \tag{39}$$

A partir de esto tenemos

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}=-\Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} \tag{40}$$

Entonces, de la Ec. (35)

$$\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}=-\Gamma_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} \tag{41}$$

Esto es, si la torsión es totalmente anti-simétrica y la conexión es anti-simétrica en dos índices cualesquiera, entonces la conexión es totalmente anti-simétrica.

Sin restricción en la conexión, pues la métrica es simétrica, la Ec. (34) deviene

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}+\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}=\Sigma_\sigma g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right). \tag{42}$$

Notamos de paso que la conexión de Christoffel sin torsión dada por Carroll [5] y Wald [4] es un caso especial de esta ecuación para torsión igual a cero cuando

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}=\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\,. \tag{43}$$

En general, sin más argumento que compatibilidad métrica, para una torsión totalmente anti-simétrica, la Ec. (42) implica cierto grado de antisimetría para la conexión, o sea cuando

- la métrica es constante, entonces la conexión es totalmente antisimétrica

- la métrica es anti-simétrica, cuando

  $$\sum_\sigma g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial(g_{\sigma\nu}+g_{\nu\sigma})}{\partial x^\mu}+\frac{\partial(g_{\mu\sigma}+g_{\sigma\mu})}{\partial x^\nu}-\frac{\partial(g_{\mu\nu}+\partial g_{\nu\mu})}{\partial x^\sigma}\right)=0 \quad (44)$$

  la conexión es nuevamente totalmente antisimétrica. Como ya se explicó, se trata sólo de un caso hipotético.
- la métrica es diagonal, la conexión es, sin mayores consideraciones, totalmente antisimétrica excepto para los elementos de la diagonal.

5. Torsión totalmente antisimétrica con métrica diagonal.

Consideremos ahora el caso donde la métrica posee sólo componentes diagonales. En dicho caso, la Ec. (34) se reduce a

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}+\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}=\begin{cases} g^{\rho\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right) & \text{si } \rho=\nu \text{ ó } \rho=\mu \text{ ó } \mu=\nu \\ 0 & \text{otros casos}\end{cases} \quad (45)$$

Esto es, sólo en base a la compatibilidad de la métrica, para una métrica diagonal y con torsión totalmente antisimétrica, $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ es ya sea "totalmente antisimétrica" o cero, con excepción de las diagonales, como indica la Ec. (45). Los elementos diagonales vienen dados por

$$2\Gamma^\rho{}_{\mu\mu}=-g^{\rho\rho}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\rho} \qquad \rho\neq\nu,\ \rho\neq\mu,\mu=\nu \quad (46)$$

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\nu}+\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}=g^{\nu\nu}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^\mu} \qquad \rho=\nu,\ \rho\neq\mu,\mu\neq\nu \quad (47)$$

$$\Gamma^\mu{}_{\mu\nu}+\Gamma^\mu{}_{\nu\mu}=g^{\mu\mu}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\nu} \qquad \rho\neq\nu,\ \rho=\mu,\mu\neq\nu \quad (48)$$

$$2\Gamma^\mu{}_{\mu\mu}=g^{\mu\mu}\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\mu} \qquad \rho=\nu,\ \rho=\mu,\mu=\nu \quad (49)$$

Este argumento por sí sólo vuelve imposible la simetría de la conexión, a menos que sea idénticamente cero. Se requieren otros argumentos para demostrar antisimetría total de la conexión. Recordar que no hay sumatoria sobre índices repetidos implícita en estas ecuaciones.

6. Esquemas de cómputo para conexiones con torsión.

Tomando una de las ecuaciones (6-8), obtenemos un sistema de ecuaciones lineales para $4^3 = 64$ componentes de las Γ conexiones, asumiendo ninguna simetría adicional. Al mismo tiempo, tenemos 64 ecuaciones individuales para todas las combinaciones de ρ, μ, ν. Esto podría dar un conjunto bien definido de ecuaciones para determinar todas las conexiones Γ. Sin embargo, la métrica es simétrica, e introduce cierta simetría en las ecuaciones, de manera que no todas las ecuaciones son independientes entre sí. Usando una métrica diagonal, donde cada elemento depende de las 4 coordenadas, por ejemplo

$$g = \begin{pmatrix} A(t,r,\varphi,\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(t,r,\varphi,\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(t,r,\varphi,\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D(t,r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} \tag{50}$$

con coordenadas $t, r, \varphi, \theta,$ el álgebra computacional da sólo 24 ecuaciones independientes a partir de (6). Ello significa que deben determinarse arbitrariamente 24 parámetros libres para hacer únicas a las conexiones Γ. Como la derivada covariante se determina con las conexiones, significa que la derivada covariante de dicha métrica con torsión no está definida en forma única, a diferencia de la geometría sin torsión. Esto pareciera un serio problema matemático.

Sumando condiciones de anti-simetría para los dos últimos índices de la conexión Γ da 4·6 = 24 condiciones adicionales.

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \tag{51}$$

para todos los elementos no-diagonales con $\mu \neq \nu$. Entonces el número de ecuaciones independientes aumenta a 60, pero restan 4 ecuaciones dependientes, dejando 4 parámetros libres sin definir. Los elementos diagonales $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\mu}$ son distintos de cero. Si se supone que son iguales a cero, dando una conexión Γ puramente anti-simétrica, entonces el sistema de ecuaciones es irresoluble.

El resultado anterior permanece válido si la métrica tiene elementos no-diagonales que dependen de las coordenadas de fila y columna de su ubicación, p.ej., $g_{12}(t,r)$, $g_{13}(t,\varphi)$, etc., tal como

$$g = \begin{pmatrix} A(t,r,\varphi,\theta) & E(t,r) & F(t,\varphi) & G(t,\theta) \\ E(t,r) & B(t,r,\varphi,\theta) & 0 & 0 \\ F(t,\varphi) & 0 & C(t,r,\varphi,\theta) & 0 \\ G(t,\theta) & 0 & 0 & D(t,r,\varphi,\theta) \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Sin embargo, introducir una asimetría o anti-simetría en la matriz métrica prohibe una solución del sistema de ecuaciones, aun sin condiciones adicionales de anti-simetría para las conexiones Γ.

El último ejemplo investigado es para la torsión totalmente anti-simétrica. En este caso, las conexiones Γ se determinan de la Ec. (42) en vez de la Ec. (6). El resultado es otra vez sólo 24 ecuaciones independientes para las métricas (50) y (52). Si se fuerza anti-simetría adicional (Ec. (51)), no se obtiene solución. Todos los resultados se resumen en la Tabla 1. El sistema de ecuaciones para torsión anti-simétrica típica muestra una conducta idéntica a la de torsión totalmente anti-simétrica si no se supone anti-simetría adicional de las conexiones. Cuando éste es el caso, no hay soluciones para la torsión totalmente anti-simétrica.

	Métrica diagonal	Métrica con elementos no diagonales de simet. especial $g_{\mu\nu}(x^\mu, x^\nu)$	Metrica con elementos no diagonales de simetría general $g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$	Métrica con elementos no diagonales asimétricos generales
Base Ec.(6)	24	24	24	-
Base Ec.(6) + cond.antisim. no diagonal	4	4	-	-
Base Ec.(42) (Torsión compl. antisimétrica)	24	24	24	-
Base Ec.(42) (Torsion) + cond. antisim. no diagonal	-	-	-	-

Tabla 1: Número de ecuaciones independientes de compatibilidad métrica (- significa ecuaciones no resolubles).

7. Ecuación del conmutador.

El conmutador de derivadas covariantes conduce a la conocida ecuación del conmutador [2]

$$[D_\mu, D_\nu] V^\kappa = R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} V^\lambda - T^\lambda{}_{\mu\nu} D_\lambda V^\kappa \tag{53}$$

donde V^κ es un vector arbitrario. El lado izquierdo es anti-simétrico en μ,ν por definición.El tensor de Riemann $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$ se define anti-simétricamente en sus dos últimos índices, y los mismo se cumple para la torsión. Por lo tanto, ambos lados de la ecuación son distintos de cero en general para $\mu \neq \nu$, pero desaparecen para $\mu = \nu$. Sólo en el tensor de torsión la parte anti-simétrica de la conexión Γ es efectiva. Si la conexión es simétrica, la torsión desaparece. Sin embargo, el tensor de Riemann no desaparece pues está definido en forma anti-simétrica irrespectivamente de la simetría de la conexión.

Por lo tanto, para una conexión simétrica, la ecuación del conmutador simplemente se reduce a

$$[D_\mu, D_\nu]V^\kappa = R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}V^\lambda \ . \tag{54}$$

Para $\mu = \nu$ ambos lados desaparecen nuevamente, pero no para $\mu \neq \nu$.

8. Discusión y Conclusiones

En trabajo previo, donde se utilizaba la conexión simétrica de la reatividad einsteiniana (hoy día obsoleta) [2] conviene comenzar con una métrica y luego computar los símbolos de Christoffel con la Ec.(5). Conociendo la métrica y las conexiones, todos los elementos de curvatura de la geometría de Riemann (tensor de Riemann, de Ricci, etc.) pueden computarse. Lo mismo para la geometría de Cartan. Se comenzaría con la tétrada, que es la transformación de coordenadas entre la variedad base y el espacio tangente. La metrica se computa entonces mediante

$$g_{\mu\nu} = q^a{}_\mu q^b{}_\nu \, \eta_{ab} \tag{55}$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski. La conexión Γ se computa ya sea de las Ecs. (6) o (42) (en caso de torsión totalmente anti-simétrica). Con la conexión Γ, pueden determinarse los tensores de torsión y curvatura, como en la relatividad eisteiniana. Sin embargo, la identidad de Bianchi contiene torsión y debe verificarse separadamente.

Hemos mostrado que la conexión o símbolo de Christoffel tiene elementos diagonales que no desaparecen. Puede forzarse la anti-simetría en los elementos no diagonales, pero hay un problema para definir una derivada covariante única para variedades con torsión, porque los métodos descritos aquí no conducen a una solución única para las conexiones de Christoffel. Este problema surge para la torsión con anti-simetría en los dos últimos índices, al igual que en torsión totalmente anti-simétrica. Podemos comparar este problema de indeterminación con la relatividad einsteiniana, donde constituye una característica intrínseca. Como las ecuaciones de campo de Einstein son covariantes generalizadas, una transformación de coordenadas de la forma

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{56}$$

siempre puede ejecutarse, dejando a las ecuaciones de campo sin cambios. Esto significa que los 10 elementos independientes de la métrica poseen 4 parámetros libres, o 4 ecuaciones deben de definirse adicionalmente para hacer a la métrica - y a la derivada covariante - únicas. En teoría einsteiniana esto constituye una restricción sobre el tensor de Einstein, $G^{\mu\nu}$:

$$D_\nu G^{\mu\nu} = 0 \tag{57}$$

que es un requisito de invariancia que consiste de 4 ecuaciones. A veces esto se utiliza como una " condición gauge" para hallar soluciones de la ecuación de campo. En teoría ECE, la transformación de coordenadas ya viene dada por la tétrada y la métrica en la Ec.(54) está definida en forma única. No hay opción para parámetros libres en la métrica. Esto no puede ser posible porque la tétrada es idéntica al potencial, según el primer axioma de ECE y esto no puede reordenarse según gauge.

Si se conoce la torsión, por ejemplo resolviendo las ecuaciones de campo, entonces pueden computarse las conexiones de Christoffel a partir de la Ec.(14) de una manera directa y única. No parece posible efectuarlo en la "forma geométrica establecida de Riemann".

En futuras investigaciones podría deducirse una métrica significativa con torsión, para ejemplos de la Ec.(55) y podria compobarse si los mismos problemas de unicidad surgen en dicho caso.

Referencias bibliográficas.

[1] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis 2005 a 20011 y de libre acceso en la Sección UFT de www.aias.us) en siete volúmenes.

[2] M. W. Evans y H. Eckardt, "On Metric Compatibility From Cartan's Geometry", artículo 128 de la serie UFT , www.aias.us.

[3] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom, S. J. Crothers, "ECE Review paper: Basics of Cartan Geometry", artículo 281 de la serie UFT, en www.aias.us

[4] Robert M. Wald; "General Relativity", The University of Chicago Press, Chicago, 1984 http://othello.alma.edu/~jensens/teaching/tutorials/GRtorsion.pdf; Nov 2005.

[5] Sean M. Carroll; "Lecture Notes in General Relativity", arXiv:gr-qc/9712019, v1, 3 Dic. 1997.

[6] Steuard Jensen, "General Relativity with Torsion", http://othello.alma.edu/~jensens/teaching/tutorials/GRtorsion.pdf; Nov 2005.