

La geometría de Cartan y el Giróscopo.

por

M. W. Evans y H. Eckardt

Civil List y AIAS / UPITEC

(www.aias.us, www.upitec.org, www.et3m.net, www.archive.org, www.webarchive.org.uk)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se demuestra que la dinámica rotacional se ve gobernada, en general, por la derivada covariante de Cartan, cuya conexión de espín es una matriz bien definida de velocidades angulares. Esta matriz puede expresarse en términos de cualquier conjunto de coordenadas, así como en términos de ángulos de Euler. Por lo tanto, la dinámica rotacional es una subestructura de la geometría de Cartan, y puede extenderse de muchas maneras diferentes, utilizando los principios de la geometría de Cartan y la teoría ECE2. Se incluyen ejemplos de aplicaciones de la teoría a varios tipos de movimientos del giróscopo.

Palabras clave: teoría ECE2, geometría de Cartan, dinámica rotacional, movimientos del giróscopo.

1. Introducción.

En documentos y libros recientes de esta serie [1-12], se ha desarrollado de varias maneras la teoría del giróscopo, y se ha aplicado la misma para explicar el conocido experimento de Laithwaite, en el cual un giróscopo, sostenido a corta distancia del cuerpo, parece no tener peso. En la Sección 2 de este documento se demuestra que la dinámica rotacional en general es un ejemplo de la derivada covariante de Cartan, con una conexión de espín bien definida, y de este modo la dinámica rotacional constituye un límite bien definido de la teoría ECE2. Este resultado se ejemplifica mediante aplicaciones a la dinámica rotacional del trompo asimétrico, utilizando ángulos de Euler y coordenadas polares esféricas. Se define la transformación de coordenadas polares esféricas a ángulos de Euler. El empleo de coordenadas polares esféricas simplifica el desarrollo de la dinámica de un giróscopo con un punto fijo, y permite que el torque relevante esté bien definido. Habiendo alcanzado esta comprensión, puede investigarse el efecto de un torque adicional. Laithwaite utilizó un torque adicional para levantar el giróscopo, y este torque puede modelarse mediante una computadora. Se desarrolla un modelo de una pesa de mano para el planeta Tierra, tratado como un giróscopo en órbita alrededor del Sol. Esta teoría sienta las bases de los ciclos de Milankovitch. Finalmente, se desarrolla la energía cinética traslacional en términos de los ángulos de Euler y las coordenadas polares esféricas, una teoría que puede emplearse para órbitas esféricas y para la descripción de las nutaciones y precesiones de la Tierra en órbita.

En la Sección 3, se analiza y desarrolla numéricamente un modelo de pesa de mano, con gráficas del movimiento. Se incluyen gráficas de ejemplos de soluciones para los problemas resueltos en la Sección 2. El avance clave es el empleo del código Maxima para resolver los conjuntos relevantes de ecuaciones de Euler Lagrange.

2. Dinámica rotacional como geometría de Cartan.

Se desarrolla el movimiento rotacional a partir de primeros principios en la Nota 370(3), la cual debiera de leerse junto con esta sinópsis. Estos principios son bien conocidos, pero se presentan con todo detalle en la Nota 370(3), por claridad de exposición. Resultan en el conocido teorema para la derivada temporal de cualquier vector \underline{F} :

$$\left(\frac{d\underline{F}}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{d\underline{F}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{F}\right)_{123} \quad (1)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la derivada en el marco de referencia del laboratorio (X, Y, Z), mientras que el lado derecho es la derivada en el marco en rotación (1, 2, 3). Aquí, $\underline{\omega}$ es el vector de la velocidad angular definido en el marco (1, 2, 3). Un ejemplo del marco (1, 2, 3) es aquel de los principales momentos de inercia del trompo asimétrico en rotación. En el marco cartesiano, a menudo conocido como el marco inercial, los ejes de coordenadas no se mueven, pero en el marco (1, 2, 3) los ejes de coordenadas mismos están rotando. La Nota

370(3) incluye todos los detalles. Nótese cuidadosamente que la dinámica newtoniana se define en el marco inercial. En el marco (1, 2, 3), por ejemplo para un giróscopo, aparecen más términos, tales como las fuerzas centrífuga y de Coriolis.

La Ec. (1) puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde ω_1 , ω_2 y ω_3 son componentes de la velocidad angular en el marco (1, 2, 3). La Ec. (2) es un caso especial de la derivada covariante de Cartan:

$$\frac{DF^a}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F^a}{\partial x^\mu} + \Omega_{\mu b}^a F^b \quad (3)$$

donde $\Omega_{\mu b}^a$ denota la conexión de espín de Cartan [1-12]. Considerando los componentes:

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ a &= 1, 2, 3 \\ b &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4)$$

se deduce que:

$$\frac{DF^1}{\partial t} = \frac{\partial F^1}{\partial t} + \Omega_{01}^1 F^1 + \Omega_{02}^1 F^2 + \Omega_{03}^1 F^3 \quad (5)$$

de manera que:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{01}^1 & \Omega_{02}^1 & \Omega_{03}^1 \\ \Omega_{01}^2 & \Omega_{02}^2 & \Omega_{03}^2 \\ \Omega_{01}^3 & \Omega_{02}^3 & \Omega_{03}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

La matriz de conexión de espín de Cartan para dinámica rotacional es, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{01}^1 & \Omega_{02}^1 & \Omega_{03}^1 \\ \Omega_{01}^2 & \Omega_{02}^2 & \Omega_{03}^2 \\ \Omega_{01}^3 & \Omega_{02}^3 & \Omega_{03}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Q. E. D.

Un ejemplo de la Ec. (1) es el torque definido por:

$$\underline{T}_{q,xyz} = \left(\frac{d\underline{L}}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{d\underline{L}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{L} \right)_{123} \quad (8)$$

donde \underline{L} es el momento angular. Utilizando:

$$L_i = I_i \omega_i \quad (9)$$

donde I_i son los principales momentos de inercia para:

$$i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

La Ec. (8) deviene las ecuaciones de Euler en el marco (1, 2, 3)

$$T_{q_1} = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \quad (11)$$

$$T_{q_2} = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \quad (12)$$

$$T_{q_3} = I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \quad (13)$$

La conexión de espín de Cartan para las ecuaciones de Euler viene, por lo tanto, dado por la Ec. (7):

$$-\underline{\Omega}_{ob}^a = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

El vector de torque viene definido por:

$$\begin{aligned} \underline{T}_q &= T_{q_x} \underline{i} + T_{q_y} \underline{j} + T_{q_z} \underline{k} \\ &= T_{q_1} \underline{e}_1 + T_{q_2} \underline{e}_2 + T_{q_3} \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (15)$$

de manera que:

$$T_{q_x}^2 + T_{q_y}^2 + T_{q_z}^2 = T_{q_1}^2 + T_{q_2}^2 + T_{q_3}^2 \quad (16)$$

Estas ecuaciones de torque se cumplen en general. En términos de los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ , las velocidades angulares vienen dadas por:

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (17)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (18)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (19)$$

El lagrangiano relevante se desarrolla en la Nota 370(4), y es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} + \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) - U(\underline{r}, \theta, \phi, \psi) \quad (20)$$

con las variables de Lagrange \underline{r} , θ , ϕ y ψ . El lagrangiano es una suma de la energía cinética traslacional del centro de masa del trompo asimétrico:

$$T_{\text{tras}} = \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} \quad (21)$$

su energía cinética rotacional:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \quad (22)$$

y la energía potencial

$$U = U(\underline{r}, \theta, \phi, \psi) \quad (23)$$

que generalmente es una función de las cuatro variables de Lagrange. La dinámica se define completamente a través de las cuatro ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\underline{\nabla} \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{r}}} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \quad (27)$$

que pueden resolverse mediante Maxima, tal como en los documentos inmediatamente precedentes.

En términos de las coordenadas polares esféricas (Nota 370(5)), la matriz de conexión de espín es:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & -\dot{\phi}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & -\dot{\phi}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{\phi}_1 \sin \theta_1 & \dot{\phi}_1 \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

donde en subíndice 1 se emplea para distinguir los ángulos del sistema de coordenadas polares esféricas de los ángulos de Euler. De manera que:

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 \cos \theta_1 \quad (29)$$

$$\omega_2 = -\dot{\phi}_1 \sin \theta_1 \quad (30)$$

$$\omega_3 = \dot{\theta}_1 \quad (31)$$

y el vector de velocidad angular en el marco (1, 2, 3) es:

$$\underline{\omega} = \dot{\phi}_1 \cos \theta_1 \underline{e}_r - \dot{\phi}_1 \sin \theta_1 \underline{e}_\theta + \dot{\theta}_1 \underline{e}_\phi \quad (32)$$

La energía cinética rotacional de un trompo asimétrico que gira libremente es, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\phi}_1^2 \cos^2 \theta_1 + I_2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta_1 + I_3 \dot{\theta}_1^2) \end{aligned} \quad (33)$$

y la solución simultánea de las dos ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \quad (35)$$

da las trayectorias $\phi_1(t)$, $\theta_1(t)$ y las velocidades angulares $\dot{\phi}_1$, $\dot{\theta}_1$ del trompo asimétrico. Se incluyen algunos detalles de cálculos en la Nota 370(5), y el álgebra puede procesarse por completo mediante el código Maxima.

Por lo tanto, el vector de velocidad angular en el marco (1, 2, 3) expresado en los sistemas polar esférico y euleriano es:

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= \omega_r \underline{e}_r + \omega_\theta \underline{e}_\theta + \omega_\phi \underline{e}_\phi \\ &= \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (36)$$

y se deduce que:

$$\dot{\phi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 (2\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) + 4\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\psi \sin\psi \sin\theta \quad (37)$$

Esta es la relación entre ángulos de las coordenadas polares esféricas y los ángulos de Euler en el marco en rotación (1, 2, 3).

Tanto los ángulos de Euler como las coordenadas polares esféricas debieran de emplearse en general para extraer toda la información dinámica para un problema dado. Consideremos el giróscopo del trompo asimétrico con un punto fijo, de manera que los orígenes del marco (X, Y, Z) y del marco (1, 2, 3) son idénticos. No hay energía cinética traslacional porque el punto está fijo, de manera que el lagrangiano, en términos de los ángulos de Euler, es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) - mgh \cos\theta \\ &= \frac{1}{2} (I_1 (\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi)^2 \\ &\quad + I_2 (\dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi)^2 \\ &\quad + I_3 (\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2) - mgh \cos\theta \end{aligned} \quad (38)$$

en donde la energía potencial es:

$$U = mgh \cos\theta \quad (39)$$

donde h es la distancia desde el origen al centro de masa, a lo largo del eje del momento de

inercia principal. Este último está inclinado con un ángulo θ respecto del eje Z del marco del laboratorio. Aquí, m es la masa del giróscopo, y g es la aceleración debida a la gravedad. Las variables de Lagrange son los ángulos de Euler, y hay tres ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \quad (42)$$

que deben de resolverse simultáneamente para dar las trayectorias $\phi_1(t)$, $\theta_1(t)$, $\psi_1(t)$ y las velocidades angulares $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ que definen las nutaciones y precesiones del giróscopo.

En la representación polar esférica del marco (1, 2, 3) el mismo lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (I_1 \dot{\phi}_1^2 \cos^2 \theta_1 + I_2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2 \theta_1 + I_3 \dot{\theta}_1^2) - mgh \cos \theta_1 \quad (43)$$

y hay solamente dos ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \quad (44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \quad (45)$$

que pueden resolverse para las trayectorias $\phi_1(t)$, $\theta_1(t)$ y velocidades angulares $\dot{\phi}_1$, $\dot{\theta}_1$. Éstas definen las precesiones y nutaciones de otra manera. Las soluciones numéricas deben de verificarse para consistencia mediante el empleo de la Ec. (37).

La velocidad angular en general es:

$$\underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3 \quad (46)$$

en el marco (1, 2, 3) de los principales momentos de inercia. El momento angular en este marco es:

$$\underline{L} = I_1 \omega_1 \underline{e}_1 + I_2 \omega_2 \underline{e}_2 + I_3 \omega_3 \underline{e}_3 \quad (47)$$

y los componentes del torque en este marco vienen dados por los ángulos de Euler, como en las Ecs. (11) a (13). En general, el torque en el marco del laboratorio es:

$$\underline{\tau}_q = \underline{r} \times \underline{F} \quad (48)$$

donde \underline{r} es el vector posición desde el origen al punto donde se aplica la fuerza \underline{F} . La fuerza se define mediante:

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} U \quad (49)$$

donde U es la energía potencial. La fuerza en el marco del laboratorio que debe de aplicarse para dar una energía potencial del tipo (39) es:

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \underline{e}_\phi \right) \quad (50)$$

en las coordenadas polares esféricas del marco del laboratorio. Por lo tanto, la fuerza es:

$$\underline{F} = \frac{mgh}{r} \sin \theta \underline{e}_\theta \quad (51)$$

y el torque en el marco del laboratorio que debe de aplicarse para dar la energía potencial (39) es:

$$\underline{\tau}_q = \underline{r} \times \underline{F} \quad (52)$$

donde:

$$\underline{r} = r \underline{e}_r \quad (53)$$

en el sistema de coordenadas polares esféricas del marco del laboratorio. Por lo tanto, el torque a aplicar es:

$$\underline{\tau}_q = mgh \sin \theta \underline{e}_r \times \underline{e}_\theta \quad (54)$$

donde los vectores unitarios del sistema de coordenadas polares esféricas del marco del laboratorio se definen mediante:

$$\underline{e}_\phi \times \underline{e}_r = \underline{e}_\theta$$

$$\underline{e}_\theta \times \underline{e}_\phi = \underline{e}_r$$

$$\underline{e}_r \times \underline{e}_\theta = \underline{e}_\phi$$

(55)

De manera que el torque en el marco del laboratorio es:

$$\underline{T}_q = mgh \sin\theta \underline{e}_\phi$$

(56)

Convirtiendo a coordenadas cartesianas:

$$\underline{e}_\phi = -\underline{i} \sin\phi + \underline{j} \cos\phi$$

(57)

de manera que el torque necesario del marco del laboratorio para producir la energía potencial (39) es:

$$\underline{T}_q = mgh \sin\theta (-\underline{i} \sin\phi + \underline{j} \cos\phi)$$

(58)

Por definición:

$$X = h \sin\theta \cos\phi$$

$$Y = h \sin\theta \sin\phi$$

(59)

de manera que el torque en el marco del laboratorio es:

$$\underline{T}_q = mg(-Y \underline{i} + X \underline{j})$$

(60)

con:

$$\underline{r} = r \underline{e}_r$$

(61)

y

$$\underline{F} = mg = -mg \underline{k}$$

(62)

Nótese cuidadosamente que la fuerza de atracción debida a la gravedad se encuentra en la dirección \underline{k} negativa. Por lo tanto:

$$\underline{T}_g = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ X & Y & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{pmatrix} = mg(-Y\underline{i} + X\underline{k}) \quad (63)$$

Q. E. D.

La ecuación de balance de torque es, por lo tanto:

$$\underline{T}_g = mg(-Y\underline{i} + X\underline{j}) = T_{g_1} \underline{e}_1 + T_{g_2} \underline{e}_2 + T_{g_3} \underline{e}_3 \quad (64)$$

y el giróscopo no se cae de lado, como en el sencillo trompo que gira. Habiendo ejemplificado las matemáticas en detalle más arriba, puede ahora aplicarse cualquier torque adicional en el marco del laboratorio, y así simular el experimento de Laithwaite.

Se incluyen dos ejemplos adicionales en las Notas 370(8) y 370(9) de la aplicación de la geometría de Cartan a la dinámica rotacional: un modelo de pesa de mano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, siendo la Tierra modelada por un giróscopo de pesa de mano, y en la Nota 370(9) la energía cinética traslacional de un giróscopo, calculada en términos de ángulos de Euler y de las coordenadas polares esféricas.

3. Soluciones numéricas y gráficas.

Consideramos un ejemplo donde se describe la rotación mediante dos puntos de masa con un acoplamiento fijo a una distancia $2h$, un así-llamado modelo de la pesa de mano, ver Fig.1. Hay un sistema de coordenadas esféricas (θ, ϕ) cuyo origen se ubica en el medio de la conexión entre ambos puntos de masa (rojo). Este es el centro de masa que rota alrededor de una masa central (azul) con otro conjunto de coordenadas polares esféricas (θ_1, ϕ_1, r) . La transformación de coordenadas de las dos masas a coordenadas cartesianas referidas al centro de masa es

$$\mathbf{h}_1 = h \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = -\mathbf{h}_1 \quad (65)$$

y la coordenada \mathbf{R} del centro de masa es

$$\mathbf{R} = r \begin{bmatrix} \text{sen}\theta_1 \cos\phi_1 \\ \text{sen}\theta_1 \text{sen}\phi_1 \\ \cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

El formalismo de Lagrange requiere las coordenadas de ambas masas en el sistema global cartesiano:

$$r_1 = \mathbf{R} + \mathbf{h}_1 \quad (67)$$

$$r_2 = \mathbf{R} + \mathbf{h}_2 . \quad (68)$$

Su energía cinética es:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2 \dot{\mathbf{r}}_2) . \quad (69)$$

Para la energía potencial efectuamos una aproximación que se cumple cuando las dos masas se mantienen lejos del centro de gravedad, que es el caso para los planetas, por ejemplo. En lugar de utilizar r_1 y r_2 , insertamos r , obteniendo la suma de las energías potenciales de ambas masas:

$$E_{pot} = - 2 \frac{mMG}{r} . \quad (70)$$

Entonces, el lagrangiano asume la sencilla forma

$$\mathcal{L} = m \left(r^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 \text{sen}(\theta_1)^2) + h^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{sen}(\theta)^2) \right) + 2 \frac{mMG}{r} \quad (71)$$

y las ecuaciones de Euler Lagrange, según (34, 35) para las cinco variables de Lagrange son:

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta), \quad (72)$$

$$\ddot{\phi} = - \frac{2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad (73)$$

$$\ddot{\theta}_1 = - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1^2 r \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)}{r}, \quad (74)$$

$$\ddot{\phi}_1 = - \frac{2r\dot{\theta}_1\dot{\phi}_1 \cos(\theta_1) + 2\dot{r}\dot{\phi}_1 \sin(\theta_1)}{r \sin(\theta_1)}, \quad (75)$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}_1^2 + r\dot{\phi}_1^2 \sin(\theta_1)^2 - \frac{MG}{r^2}. \quad (76)$$

La solución numérica mediante el empleo del código Maxima da origen a los resultados mostrados en las Figs. 2-4. Resulta obvio que las coordenadas centrales (θ_1 , ϕ_1 , r) se desacoplan de aquellas locales de las masas de la pesa de mano (θ , ϕ). Estas últimas muestran oscilaciones de nutación y precesión, ver Fig. 2. A partir de la gráfica de trayectorias de las coordenadas

centrales (Fig. 3) puede observarse que θ_1 se mantiene en su valor inicial de $\pi/2$, es decir que el movimiento ocurre en un plano y no sufre distorsiones por causa de la pesa de mano. El radio oscila entre un valor máximo y la mitad del mismo, es una órbita elíptica. Correspondientemente, el ángulo azimutal ϕ varía para diferentes velocidades, siendo más altas en el perihelio, como es bien sabido a partir del movimiento de los planetas.

En la Fig. 4 se representan gráficamente las órbitas del centro de masa (azul) y una de las masas de la pesa de mano (rojo). El movimiento plano central puede observarse como superpuesto con una oscilación tridimensional de las masas. Pueden servir como un modelo sencillo para los ciclos de Milankovitch. Estos últimos son muy lentos comparados con una órbita, y aquí seleccionamos los valores de los parámetros de manera que las desviaciones respecto de la elipse puedan apreciarse fácilmente.

Como otro ejemplo, resolvemos para el movimiento de un cuerpo rígido en rotación, en coordenadas polares esféricas, tal como se describe en las ecuaciones (33-35). Esto conduce a las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{(I_2 - I_1)\dot{\phi}_1^2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)}{I_3}, \quad (77)$$

$$\ddot{\phi}_1 = -\frac{2(I_2 - I_1)\dot{\theta}_1\dot{\phi}_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)}{I_1 \cos^2(\theta_1) + I_2 \sin^2(\theta_1)}. \quad (78)$$

Se observa que estas ecuaciones transforman a un movimiento libre en el caso de $I_1 = I_2$, es decir que los lados derechos de las ecuaciones se vuelven iguales a cero. Un trompo simétrico rota con velocidad angular constante. Las ecuaciones se resolvieron para $I_1 = 1$, $I_2 = 1.5$, $I_3 = 2.5$, y las soluciones se representan gráficamente en la Fig. 5. El ángulo polar θ describe una nutación, mientras que ϕ aumenta en forma irregular. El motivo es el comportamiento oscilatorio del vector de velocidad angular ω , cuyos componentes se representan gráficamente en la Fig. 6. El módulo de ω no es constante, y éste no es una constante de movimiento.

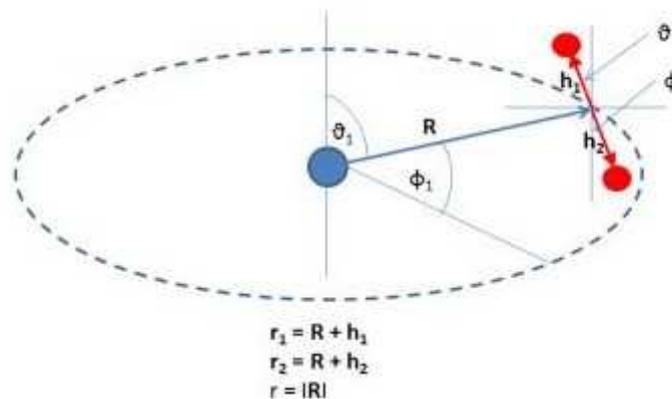


Figura 1: El modelo de la pesa de mano en rotación, con coordenadas.

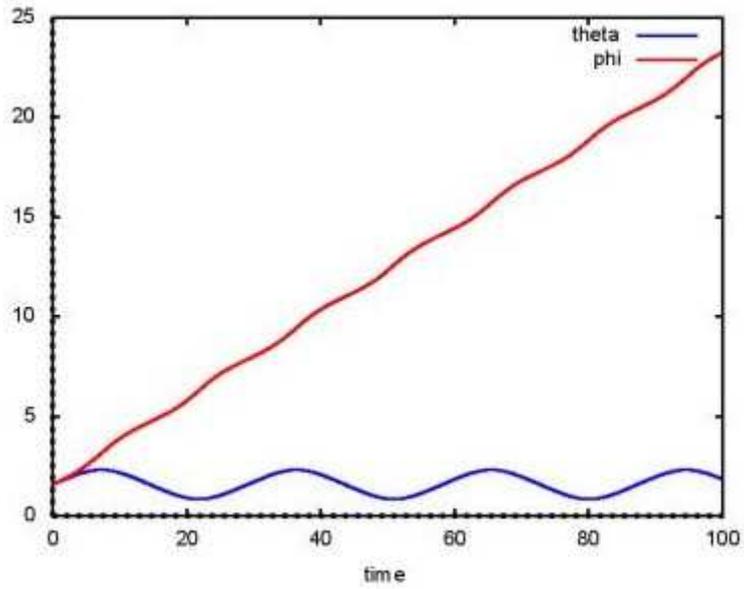


Figura 2: Pesa de mano en rotación, trayectorias $\theta(t)$ y $\phi(t)$.

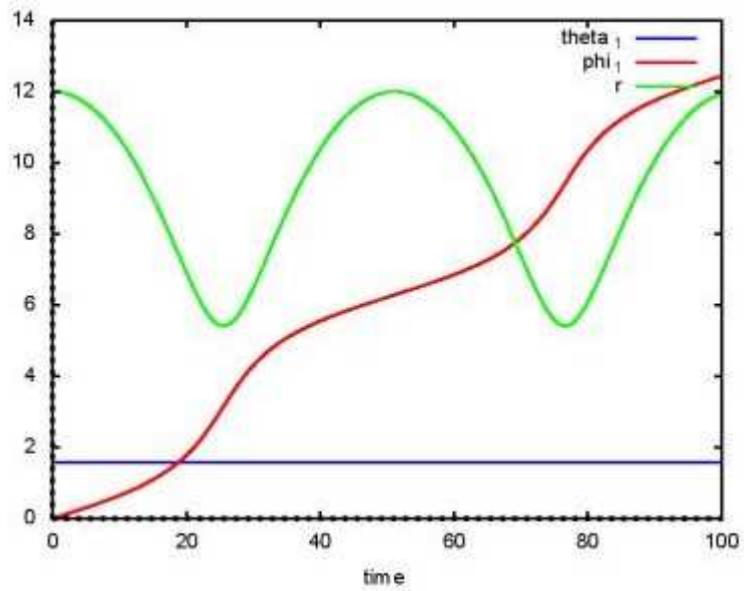


Figura 3: Movimiento del centro de masa, trayectorias $\theta_1(t)$, $\phi_1(t)$, $r(t)$.

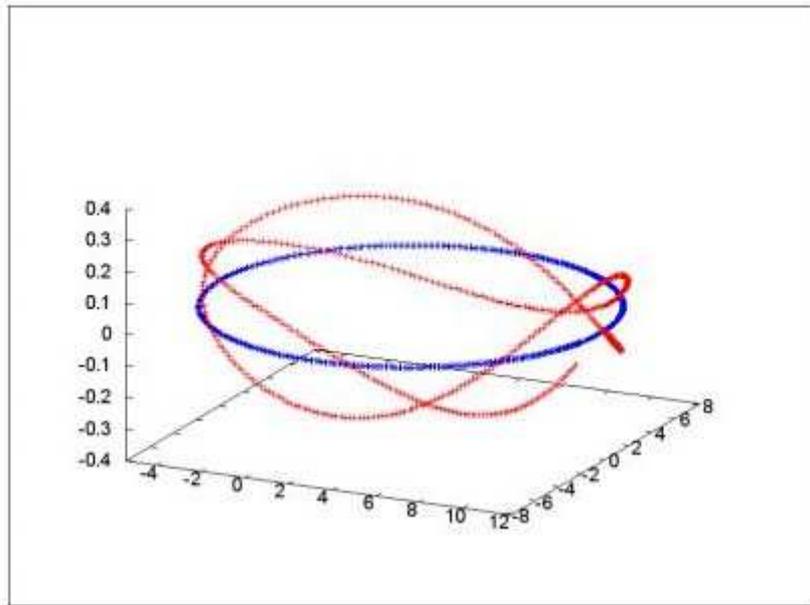


Figura 4: Órbita del centro de masa (azul) y una masa de la pesa (rojo).

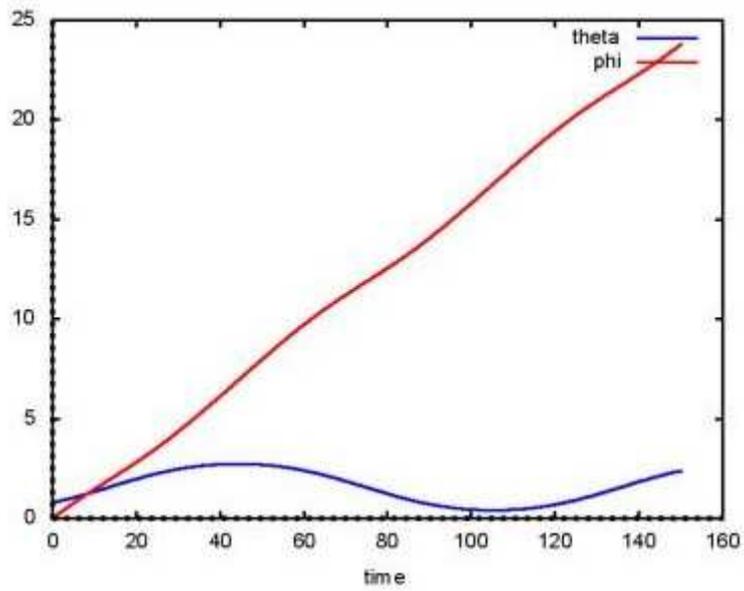


Figura 5: Cuerpo rígido en rotación, trayectorias $\theta_1(t)$, $\phi_1(t)$ en coordenadas esféricas.

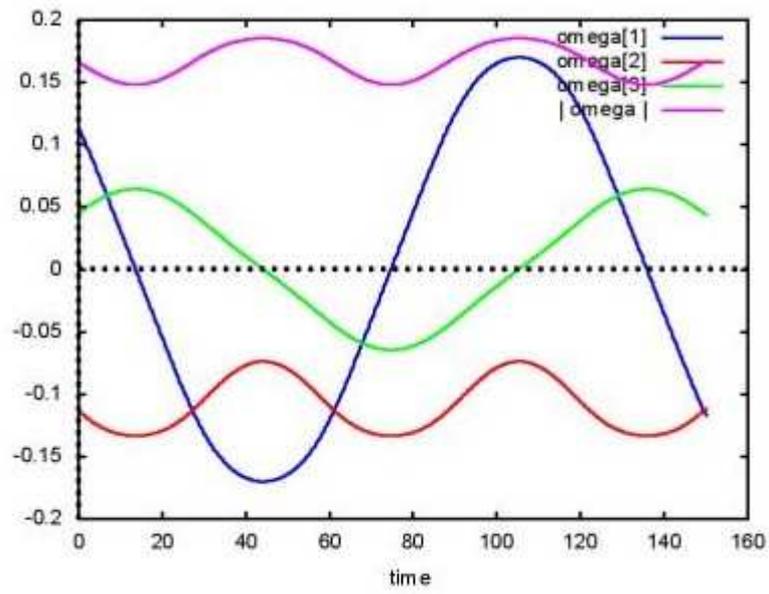


Figura 6: Cuerpo rígido en rotación, velocidades angulares $\omega_{1,2,3}$ y módulo de ω .

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia, y al equipo técnico de AIAS y otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh, CEO de Annexa Inc., como anfitrión del portal, publicación voluntaria y mantenimiento del portal y programación y equipo de retroalimentación. Se agradece a Alex Hill por las traducciones y lecturas en idioma castellano, y a Robert Cheshire por las lecturas en idioma inglés.

Referencias bibliográficas.

- [1] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, “ECE2: The Second Paradigm Shift” (UFT366 en los portales www.aias.us y www.upitec.org y en la sección de Publicaciones, epubli Berlín en prep. 2017, traducción al castellano por Alex Hill).
- [2] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, “The Principles of ECE” (UFT350 y sección de Publicaciones del portal www.aias.us , epubli Berlín 2016, New Generation Publishing 2016, traducción al castellano por Alex Hill).
- [3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, “Criticisms of the Einstein Field Equation” (UFT301 y Cambridge International 2010 (CISP)).
- [4] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, “Generally Covariant Unified Field Theory” (Abramis 2005 a 2011 y documentos relevantes de la serie UFT en los portales www.aias.us y www.upitec.org).
- [5] L. Felker, “The Evans Equations of Unified Field Theory” (Abramis 2007, UFT302 y traducción al castellano por Alex Hill).
- [6] H. Eckardt, “The ECE Engineering Model” (UFT303).
- [7] M. W. Evans, “Collected Scientometrics” (UFT307).
- [8] M. W. Evans, Ed., J. Found. Phys. Chem, (CISP 2011, y documentos UFT relevantes).
- [9] M. W. Evans y L. B. Crowell, “Classical and Quantum Electrodynamics and the $B^{(3)}$ Field” (World Scientific 2001, sección de Omnia Opera en el portal www.aias.us).
- [10] M. W. Evans y S. Kielich (Eds), “Modern Nonlinear Optics” (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001), en dos ediciones y seis volúmenes.
- [11] M. W. Evans y J.-P. Vigié, “The Enigmatic Photon” (Kluwer, 1994 a 2002 y sección de Omnia Opera), en cinco volúmenes con encuadernación dura o blanda.
- [12] M. W. Evans y A. A. Hasanein, “The Photomagnetron in Quantum Field Theory” (World Scientific, 1994).