

Teoría orbital general en un espacio-tiempo con simetría esférica.

por

M. W. Evans y H. Eckardt
Civil List y AIAS / UPITEC

(www.aias.us, www.upitec.org, www.et3m.net, www.archive.org, www.webarchive.org.uk)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se desarrolla el tipo más general de teoría orbital en un espacio-tiempo con simetría esférica. Esta teoría se desarrolla a partir del hecho de que el hamiltoniano (H) relativista, y el momento angular relativista (L), son constantes de movimiento. Se define el sistema de coordenadas para resolver numéricamente la órbita general y las ecuaciones de movimiento. Las órbitas resultantes presentan precesión y pueden disminuir, de manera que una partícula m , que gira en órbita alrededor de una partícula M eventualmente colisiona con ella. Esta teoría puede describir todas las órbitas observables sin necesidad de recurrir a la ecuación de campo de Einstein.

Palabras clave: teoría ECE2, órbitas generales en espacio-tiempo con simetría esférica.

1. Introducción.

En documentos inmediatamente precedentes de esta serie [1-41], se ha desarrollado una teoría covariante según ECE2 con el objeto de describir la precesión y el encogimiento orbital sin el empleo de la incorrecta ecuación de campo de Einstein. Ésta última fracasa experimentalmente en sistemas estelares S por un orden de magnitud, y ha sido refutada en casi un centenar de formas empleando las teorías ECE y ECE2. En la Sección 2, se define un sistema de coordenadas con rigurosa consistencia interna, y utilizado para definir el lagrangiano y el hamiltoniano. Este es el único sistema de coordenadas que posee una rigurosa consistencia interna. El hamiltoniano y el momento angular resultan, en este sistema de coordenadas, constantes de movimiento con rigurosa consistencia interna, y se emplea esta propiedad para construir una novedosa y sencilla nueva cosmología, en las que las órbitas pueden, en forma general, tanto mostrar precesión y encogimiento, tal y como se observa, por ejemplo, en púlsares binarios. La nueva cosmología puede describir sistemas estelares S, en donde la relatividad general einsteiniana (RGE) fracasa por un orden de magnitud. Los sistemas estelares S refutan por completo la proclamada precisión de la RGE, y de hecho refutan la totalidad del pensamiento del siglo XX referido a física gravitacional. En la Sección 3 se incluye un extensivo análisis numérico y gráfico a partir de los primeros resultados obtenidos de esta nueva cosmología.

Este documento constituye una breve sinópsis de extensos cálculos incluidos en las Notas de Acompañamiento UFT416 publicadas en los portales www.aias.us y www.upitec.org. La Nota 416(1) da una breve reseña de las propiedades de las métricas y elementos lineales con simetría esférica más generales, y ofrece las ecuaciones de movimiento del documento UFT415, utilizando el sistema plano de coordenadas polares (r, ϕ) . La Nota 416(2) desarrolla el sistema de coordenadas con rigurosa consistencia interna, utilizado para producir las órbitas de la Sección 3. Este sistema de coordenadas es aquel definido por el espacio-tiempo con simetría esférica más general, y debe de utilizarse siempre. La Nota 416(3) verifica por duplicado la Nota 416(2), utilizando el método geodésico.

2. Teoría con una rigurosa consistencia interna.

Consideremos el sistema de coordenadas polares planas (r_1, ϕ) donde

$$r_1 = \frac{r}{m(r)^{1/2}}, \quad (1)$$

En este sistema de coordenadas, el elemento lineal infinitesimal del espacio-tiempo con simetría esférica es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 = m(r) c^2 dt^2 - dr_1^2 - r_1^2 d\phi^2 \quad (2)$$

en donde la velocidad newtoniana v se define mediante:

$$v^2 dt^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\phi^2. \quad (3)$$

Se deduce que el factor de Lorentz se generaliza a:

$$\gamma = \left(m(r) - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (4)$$

El lagrangiano cinético de partícula libre [1-41] es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m c^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dz} \frac{dx^\nu}{dz} \quad (5)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica, y:

$$x^\mu = (ct, r_i) \quad (6)$$

es el cuatro-vector de posición. Se deduce a partir de las Ecs. (2) y (6) que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(m(r) c^2 \left(\frac{dt}{dz} \right)^2 - \left(\frac{dr_i}{dz} \right)^2 - r_i \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dz} \frac{dx^\nu}{dz} \quad (7)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} m g_{00} \frac{dx^0}{dz} \frac{dx^0}{dz} = \frac{1}{2} m m(r) c^2 \left(\frac{dx^0}{dz} \right)^2 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} m g_{ii} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^i}{dz} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr_i}{dz} \right)^2 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} m g_{zz} \frac{dx^z}{dz} \frac{dx^z}{dz} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 r_i^2 \quad (10)$$

El principio de Hamilton de la mínima acción es:

$$\delta \int \mathcal{L} dz = 0 \quad (11)$$

y la ecuación de Euler Lagrange es:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad (12)$$

donde:

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dz} \quad (13)$$

A partir de la ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dt}{dz}\right)} = 0 \quad (14)$$

se deduce que:

$$\frac{dE}{dz} = 0 \quad (15)$$

donde la energía cinética relativista total E de la partícula libre es

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dt}{dz}\right)} = m(r) mc^2 \frac{dt}{dz} = m(r) \gamma mc^2 \quad (16)$$

y a partir de la Ec. (15) es una constante de movimiento de una partícula libre. El hamiltoniano de una partícula en interacción de masa m es, por lo tanto:

$$H = E + U, \quad (17)$$

Nótese cuidadosamente que en el espacio curvo m la energía potencial de interacción entre m y M en una órbita es:

$$U = - \frac{mMG}{r_i} \quad (18)$$

Aquí, M es la masa de la partícula alrededor de la cual gira en órbita m , y G es la constante de Newton. El hamiltoniano es una constante de movimiento en general:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (19)$$

La ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dr_i}{dz}\right)} = 0 \quad (20)$$

da:

$$\frac{dp_i}{dz} = 0 \quad (21)$$

donde

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dr_i}{dz}\right)} = m \frac{dr_i}{dz} \quad (22)$$

p_1 es el momento lineal conservado de una partícula libre en el espacio-tiempo con simetría esférica más general. Por definición:

$$P_1 = m \frac{dr_1}{d\tau} = \frac{\gamma}{m(r)^{1/2}} m \frac{dr}{dt} \quad (23)$$

como en UFT415, de manera que el sistema de coordenadas y la teoría poseen una rigurosa consistencia interna, Q. E. D.

Finalmente, la ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)} = 0 \quad (24)$$

da:

$$\frac{dL}{d\tau} = 0 \quad (25)$$

donde:

$$L = m r_1^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\gamma m r^2}{m(r)} \frac{d\phi}{dt} \quad (26)$$

es el momento angular conservado en el espacio-tiempo con simetría esférica más general. Éste es el mismo momento angular que en UFT415, pero el sistema de coordenadas polar plano (r, ϕ) no da el momento lineal correcto deducido a partir de consideraciones cinemáticas fundamentales, como en UFT415. Las ecuaciones de movimiento de la nueva cosmología son, por lo tanto:

$$\frac{dH}{d\tau} = 0 \quad (27)$$

y

$$\frac{dL}{d\tau} = 0 \quad (28)$$

Finalmente, utilizamos:

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{dH}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dH}{dt} \quad (29)$$

y

$$\frac{dL}{d\tau} = \frac{dL}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dL}{dt} \quad (30)$$

para hallar que:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (31)$$

y

$$\frac{dL}{dt} = 0. \quad (32)$$

Estos se integran en forma numérica en la Sección 3, para dar cualquier órbita observable. El método numérico verifica que H y L se conservan en forma rigurosa, de manera que las técnicas numéricas y analíticas son correctas, y H y L se conservan en forma rigurosa, Q. E. D.

El lagrangiano orbital en (r_1, ϕ) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -mc^2 \left(u(r) - \frac{1}{c^2} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 \right)^{1/2} + \frac{mMG}{r_1} \\ &= -mc^2 \left(u(r) - \frac{1}{c^2} (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\phi}^2) \right)^{1/2} + \frac{mMG}{r_1} \end{aligned} \quad (33)$$

y posee la conocida propiedad fundamental:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0, \quad (34)$$

El momento lineal a partir de a Ec. (33) es:

$$\underline{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}_1} = \gamma m \underline{v}_1 = \frac{\gamma m}{u(r)^{1/2}} \underline{\dot{r}}_1 \quad (35)$$

y es igual que el resultado obtenido en UFT415 a partir de la definición fundamental del vector posición \underline{r}_1 en el espacio con simetría esférica más general:

$$\underline{r}_1 = r_1 \underline{e}_r = \frac{r}{u(r)^{1/2}} \underline{e}_r \quad (36)$$

El momento angular conservado, a partir de la Ec. (33) es:

$$\underline{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \gamma m r_1^2 \dot{\phi} = \gamma \frac{m r^2}{u(r)} \dot{\phi} \quad (37)$$

que es igual al resultado a partir del método geodésico, la Ec. (26), Q. E. D. Más aún, a partir de las Ecs. (35) y (36):

$$\underline{L} = \underline{r}_1 \times \underline{p}_1 = \frac{\gamma m r^2}{u(r)} \frac{d\phi}{dt} \underline{k} \quad (38)$$

que es nuevamente el mismo resultado para el momento angular conservado, dando una triple

verificación del momento angular.

La ecuación de Leibniz en el espacio con simetría esférica más general, es:

$$\underline{\dot{p}}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_1} \quad (39)$$

es decir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{r}}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_1} \quad (40)$$

y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma m \underline{\dot{r}}}{m(r)^{1/2}} \right) = -mMG \frac{\underline{r}_1}{r_1^3} \quad (41)$$

Las ecuaciones de movimiento (31) y (32) se desarrollan numéricamente en la Sección 3 y en el sistema de coordenadas (r, ϕ) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} \ddot{r} = & \left(\frac{dm(r)}{dr} \right) \left(c^2 m(r) + \frac{MG}{2\gamma^3 r m(r)^{1/2}} - \frac{3c^2}{2\gamma^3} \right) \\ & - \frac{dm(r)}{dr} \frac{\dot{\phi}^2 r^2}{m(r)} \left(2 - \frac{MG}{2\gamma c^2 r m(r)^{1/2}} - \frac{MG \dot{\phi}^2}{\gamma c^2 m(r)^{1/2}} \right) \\ & + \dot{\phi}^2 r - \frac{MG m(r)^{1/2}}{\gamma^3 r^2} \end{aligned} \quad (42)$$

y

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{\phi} \dot{r}}{m(r)} \frac{dm(r)}{dr} \left(2 - \frac{MG}{2\gamma c^2 r m(r)^{1/2}} \right) + \frac{MG}{\gamma c^2 r m(r)^{1/2}} - \frac{2}{r} \quad (43)$$

Éstas se integran como ecuaciones simultáneas, dándonos una gran cantidad de nueva información acerca de cualquier órbita observable. Una breve muestra de semejante información se presenta en la Sección 3.

3. Algunos resultados a partir de las Ecs. (42) y (43)

3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange.

En primer lugar, presentamos las ecuaciones de movimiento basadas en el espacio m como extensión del trabajo de álgebra computacional de UFT 415. La velocidad de un objeto en órbita en el espacio del observador es

$$v = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (44)$$

y la coordenada radial y la velocidad en el espacio m son

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{m(r)}} \quad (45)$$

$$v_1 = \frac{v}{\sqrt{m(r)}} \quad (46)$$

Además, el tiempo se transforma en forma inversa a r :

$$t_1 = \sqrt{m(r)} t. \quad (47)$$

Tal como se desarrolló en la Sección 2, la energía potencial es

$$E_{\text{pot}} = -\sqrt{m(r)} \frac{mMG}{r} \quad (48)$$

y la energía total relativista es

$$E = (m(r) \gamma - 1) mc^2 - \sqrt{m(r)} \frac{mMG}{r} = \text{const.} \quad (49)$$

con el factor γ del espacio-tiempo no constante, con simetría esférica:

$$\gamma = \left(m(r) - \frac{v_1^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left(m(r) - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{m(r) c^2} \right)^{-1/2} \quad (50)$$

El momento angular conservado es

$$L = \gamma m r_1^2 \dot{\phi} = \frac{\gamma}{m(r)} m r^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (51)$$

Las ecuaciones de movimiento se deducen como ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del lagrangiano relativista

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} + \sqrt{m(r)} \frac{mMG}{r}. \quad (52)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, en forma normalizada, se obtienen a partir del cálculo analítico mediante álgebra computacional:

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi} \dot{r} \left(\frac{\frac{d}{dr} m(r)}{m(r)} \left(2 - \frac{GM}{2\gamma c^2 r \sqrt{m(r)}} \right) + \frac{GM}{\gamma c^2 r^2 \sqrt{m(r)}} - \frac{2}{r} \right), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} = & \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) \left(c^2 m(r) + \frac{GM}{2\gamma^3 r \sqrt{m(r)}} - \frac{3c^2}{2\gamma^2} \right) \\ & - \frac{\frac{d}{dr} m(r)}{m(r)} \dot{\phi}^2 r_1^2 \left(2 - \frac{GM}{2\gamma c^2 r \sqrt{m(r)}} \right) - \frac{GM \dot{\phi}^2}{\gamma c^2 \sqrt{m(r)}} \\ & + \dot{\phi}^2 r - \frac{GM \sqrt{m(r)}}{\gamma^3 r^2}. \end{aligned} \quad (54)$$

La función m debe de predefinirse como un parámetro de cálculo. Las ecuaciones y sus resultados son muy similares a la versión temporaria provista en UFT 415. Se analizan ejemplos numéricos en la siguiente sub-sección.

En lugar de ejecutar los cálculos en el espacio del observador (r, ϕ), podemos cambiar completamente a las coordenadas del espacio m (r_1, ϕ). Con (45-47), todas las cantidades dependientes de r se transforman a cantidades dependientes de r_1 , dando

$$E_{\text{pot}} = -\frac{mMG}{r_1} \quad (55)$$

$$E = (m_1(r) \gamma - 1) mc^2 - \frac{mMG}{r_1} \quad (56)$$

$$\gamma = \left(m(r) - \frac{v_1^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left(m(r) - \frac{\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\phi}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (57)$$

$$L = \gamma m r_1^2 \dot{\phi} \quad (58)$$

y el lagrangiano relativista resulta

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{mMG}{r_1}. \quad (59)$$

Dado que este lagrangiano se estructura de un modo más sencillo que para el sistema de coordenadas del observador (Ec.(52)), las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes son más sencillas:

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi} \dot{r}_1 \left(\frac{1}{m(r_1)} \left(\frac{d}{dr_1} m(r_1) + \frac{GM}{\gamma c^2 r_1^2} \right) - \frac{2}{r_1} \right), \quad (60)$$

$$\ddot{r}_1 = \left(\frac{d}{dr_1} m(r_1) \right) \left(c^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2 m(r_1)} \right) - \frac{\dot{\phi}^2 r_1^2}{m(r_1)} \right) - \frac{GM \dot{\phi}^2}{\gamma c^2 m(r_1)} + \dot{\phi}^2 r_1 - \frac{GM}{\gamma^3 r_1^2 m(r_1)}. \quad (61)$$

El último término de $\ddot{\phi}$ y los dos últimos términos de \ddot{r}_1 son las expresiones no relativistas, donde el potencial gravitacional posee un factor de $1/\gamma^3$, tal como ya se observó en UFT 415. Además, la función m aparece en los dos últimos términos.

3.2 Resultados de los cálculos numéricos.

El conjunto de ecuaciones simultáneas (53, 54) se ha resuelto numéricamente. Los resultados son esencialmente similares a aquellos presentados en UFT 415. En la Fig. 1 se representan gráficamente las órbitas $r(\phi)$ y $r_1(\phi)$ para una masa que colisiona con el centro, donde se utilizó la función m de la métrica ampliada de Schwarzschild:

$$m(r) = 1 - \frac{2MG}{c^2 r} - \frac{\alpha}{r^2}. \quad (62)$$

La órbita r_1 es ligeramente mayor que la órbita r porque $m(1) = 0.94$ para el punto inicial $r = 1$. Cuando colapsa la órbita de r , $m(r)$ se va a cero, permitiendo que r_1 se vaya a infinito. La masa se ve repelida del centro en el marco (r_1, ϕ) pero cae hacia el centro en el marco del observador (r, ϕ) . Tal y como se explicó en UFT 415, el movimiento finaliza donde $m(r) = 0$.

En los cálculos subsecuentes, se empleó la función m exponencial porque no se basa en la relatividad general einsteiniana. La Fig. 2 muestra la contraparte de la Fig. 1, calculada con la función m exponencial

$$m(r) = a - \exp \left(b \exp \left(-\frac{r}{R} \right) \right). \quad (63)$$

La órbita describe una espiral hacia adentro para la trayectoria r , así como para la trayectoria r_1 . Su dependencia del tiempo se representa en la Fig. 3 y el comportamiento de su velocidad en la Fig. 4. Las velocidades primeramente crecen cuando la masa en órbita se aproxima al centro, pero luego caen en forma drástica. El valor de v cae a cero, indicando que la masa en órbita alcanza el reposo en el marco del observador, pero la velocidad v_1 permanece como final en el marco (r_1, ϕ) .

El momento angular relativista (Fig. 5) para el mismo movimiento permanece constante hasta que r se aproxima a cero, donde diverge el cálculo. Los valores newtonianos se van a cero antes de este punto porque $v = 0$ y, en consecuencia, $\dot{\phi} = 0$ en este punto. La energía total relativista y la newtoniana se representan en la Fig.6. En el caso newtoniano, la energía cinética desaparece en el punto final $r = 0$ y diverge la energía potencial. Como consecuencia, la energía total newtoniana diverge a $-\infty$. En el caso relativista, la divergencia del término $1/r$ se ve contrapesado por el factor γ y la función m , tal como puede observarse, por ejemplo, en el último término de la Ec. (54). Por lo tanto, la energía total no muestra en este caso un comportamiento singular.

A continuación, investigamos los efectos de un horizonte de evento. No resulta claro si existe en la naturaleza semejante entidad, pero a partir de la teoría m semejante estructura resulta posible. Hemos introducido un punto cero en $m(r)$ a $r_0 = 0.3$, tal como se muestra en la Fig. 7. Entonces la función m resulta

$$m(r) = a - \exp\left(b \exp\left(\pm \frac{r - r_0}{R}\right)\right) \quad (64)$$

donde el signo de suma se mantiene para $r < r_0$ y el signo de resta para $r > r_0$. Primero consideramos el espacio exterior $r > r_0$. Si las órbitas de las masas se ubican a una distancia suficiente del horizonte de evento en r_0 , obtenemos, en el caso periódico, las elipses con precesión y las curvas oscilando entre dos radios. Semejante caso se representa en la Fig. 8. Si la velocidad inicial del cálculo cae por debajo de cierto valor, la masa se detiene en el horizonte de evento y permanece allí, ver Fig. 9. La órbita r_1 diverge, de una manera similar al caso de la Fig. 1. Puede que la razón sea que la función m (62) contenga implícitamente un horizonte de evento, denominado el radio de Schwarzschild.

En la Fig. 10 se representa el movimiento periódico de una masa dentro del horizonte. Éste es un movimiento de precesión en tanto que la masa no se aproxime demasiado al horizonte de evento. Se observa que las órbitas r y r_1 se vuelven diferentes en la región exterior, donde están más cerca del horizonte. Esto resulta inverso al movimiento con una función m central (ver, por ejemplo, la Fig. 2). Cuando la velocidad inicial excede cierto valor, la masa se ve atrapada por el horizonte de evento, lo cual conduce a una finalización del movimiento. Este caso se representa gráficamente en la Fig. 11. Resulta interesante que la órbita r_1 cruza el horizonte y permanece infinitamente, pero la órbita r finaliza en $r = r_0$. Obviamente, un horizonte de evento constituye un límite insuperable. Esto resulta diferente

de la obsoleta teoría del agujero negro, donde una masa puede caer libremente a través del horizonte de evento.

Los últimos cálculos se llevaron a cabo con el conjunto de ecuaciones (60, 61) el cual describe el movimiento *a priori* en el espacio (r_1, ϕ) . La Fig. 12 muestra una órbita con una precesión hacia adelante. Dado que la órbita siempre posee una mayor distancia al centro, no hay diferencia visible entre las trayectorias de r y r_1 . Cuando se selecciona una velocidad inicial menor, es decir la energía total es menor en cantidad, se obtiene una precesión en retroceso, ver la Fig. 13 (observar las diferentes longitudes de escalas en ambos diagramas). Finalmente, en la Fig. 14, se demuestra que también para el conjunto de ecuaciones (60, 61) la energía total se conserva, así como el momento angular.

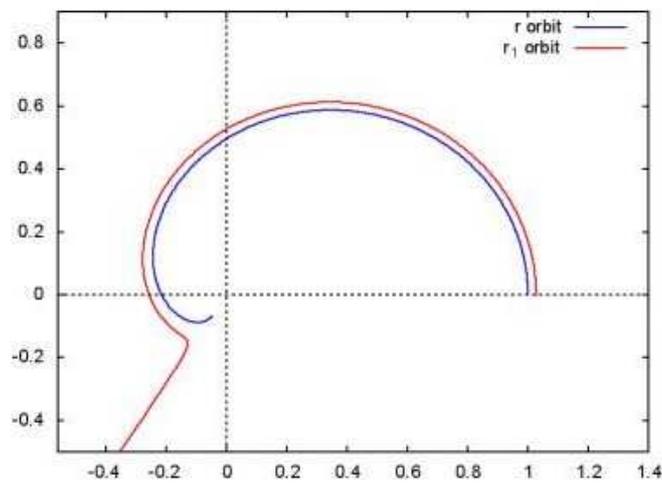


Figura 1: Órbitas con función m tipo Schwarzschild (62).

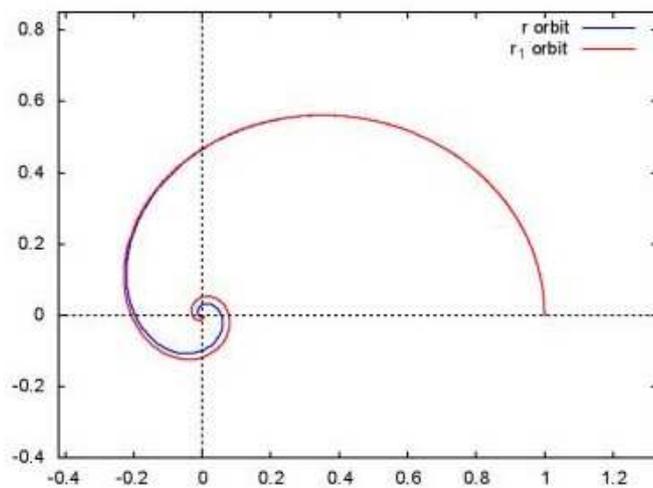


Figura 2: Órbitas con función m exponencial (63).

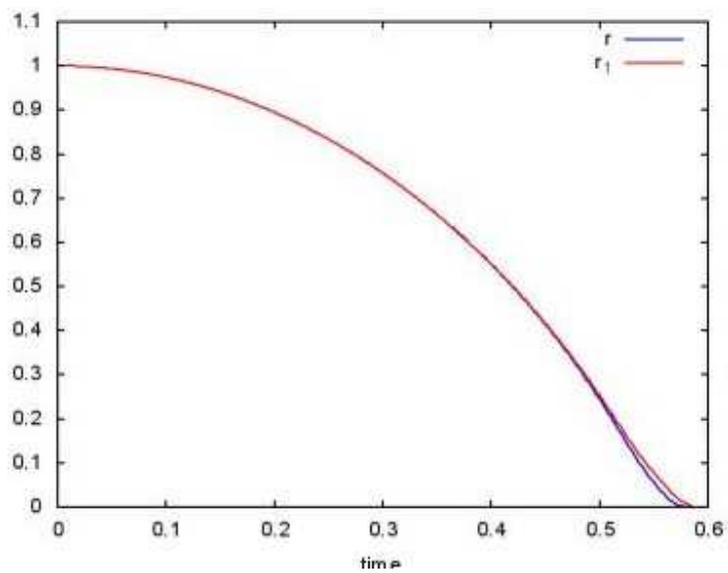


Figura 3: Trayectorias $r(t)$ y $r_1(t)$.

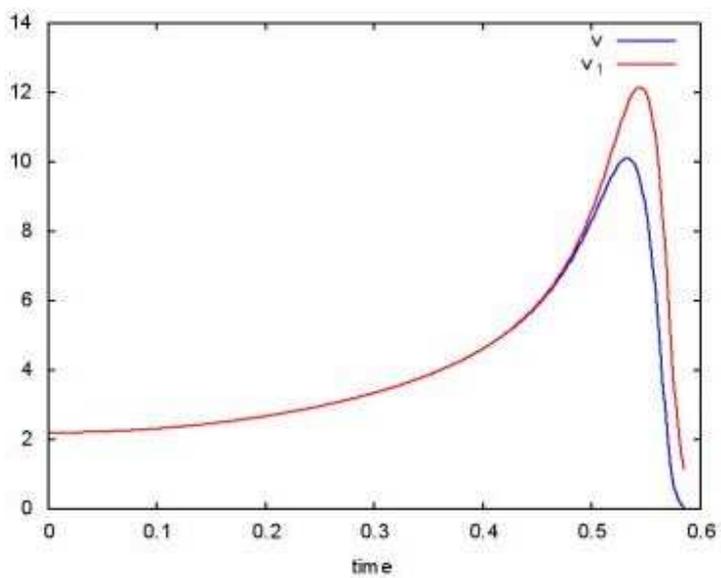


Figura 4: Trayectorias $v(t)$ y $v_1(t)$.

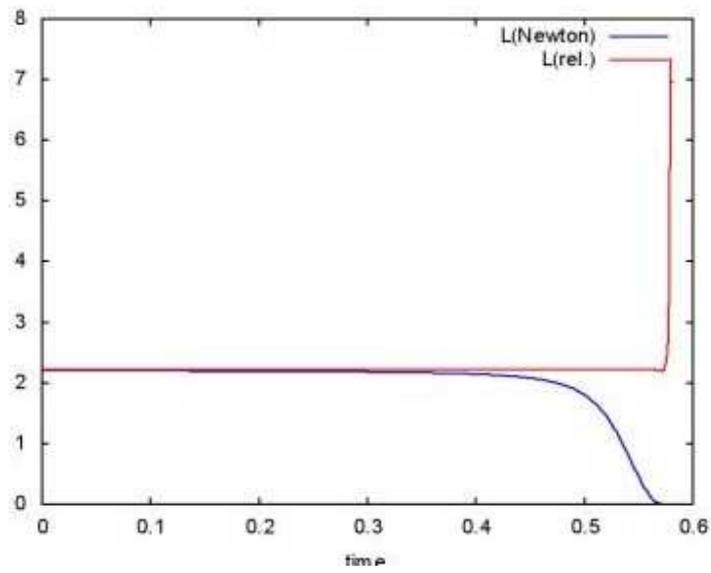


Figura 5: Momentos angulares de movimiento.

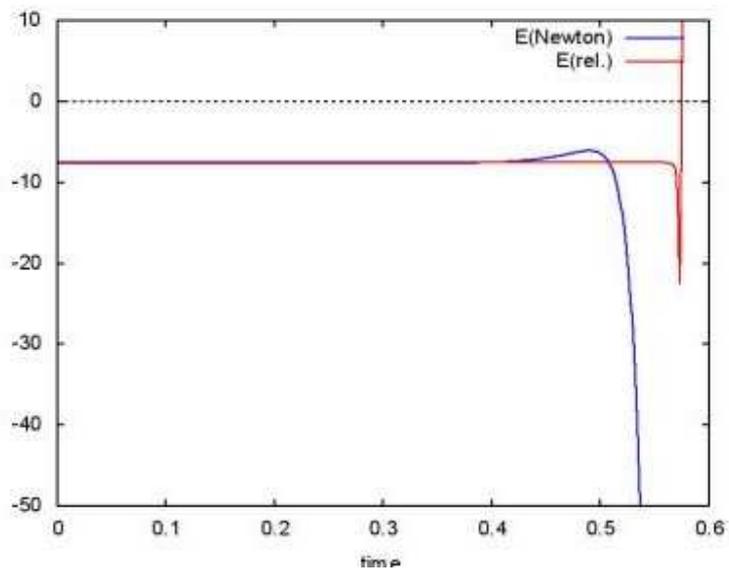


Figura 6: Energía total de movimiento.

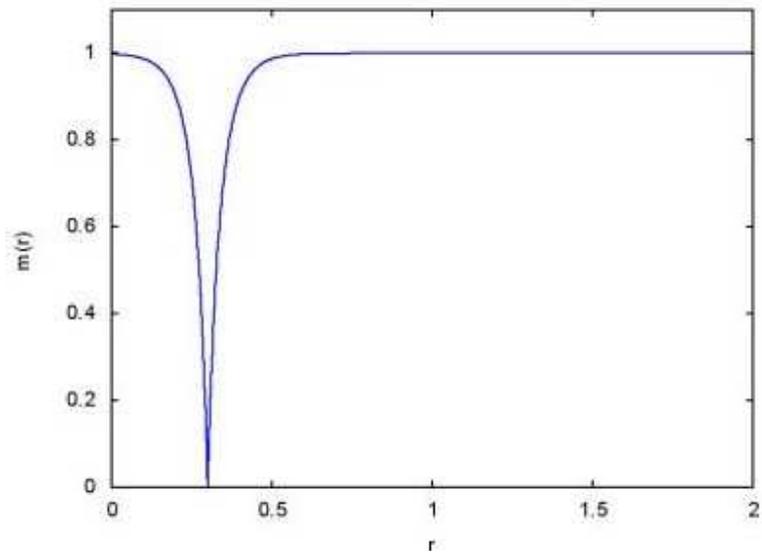


Figura 7: Función m con horizonte de evento en $r = 0.3$.

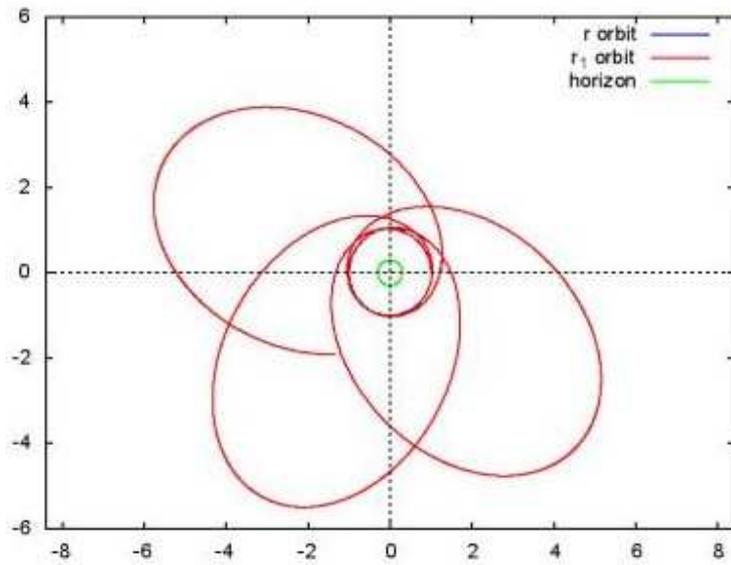


Figura 8: Órbitas periódicas externas al horizonte de evento.

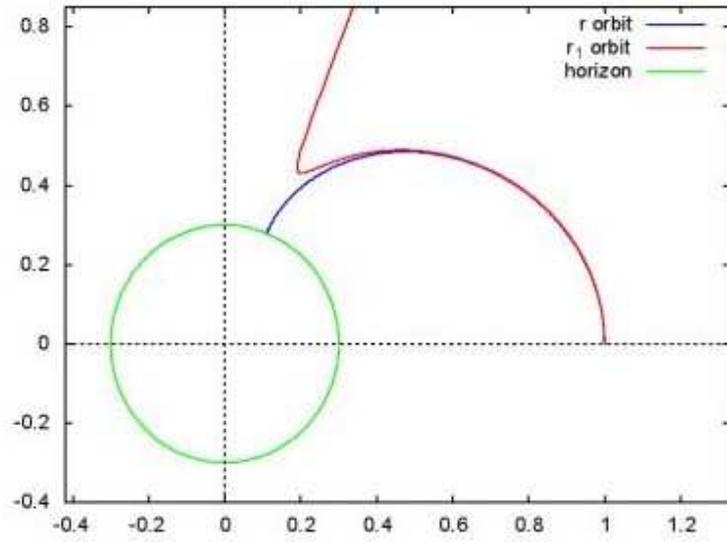


Figura 9: Órbitas que colapsan por fuera del horizonte de evento.

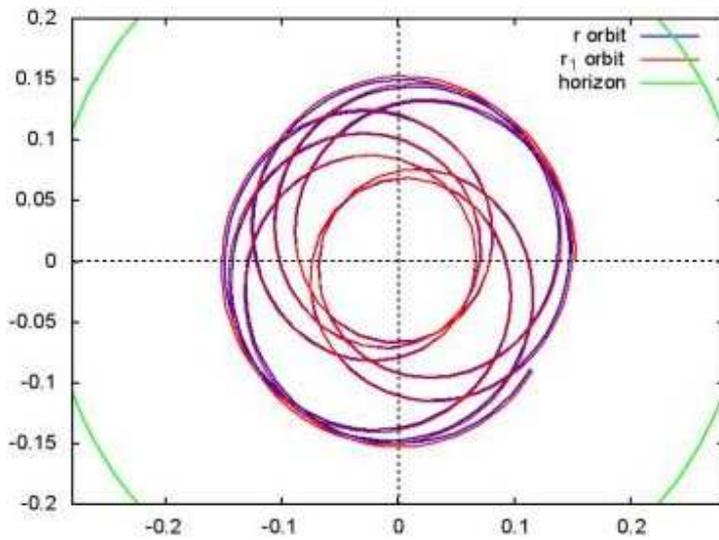


Figura 10: Órbitas periódicas dentro del horizonte de evento.

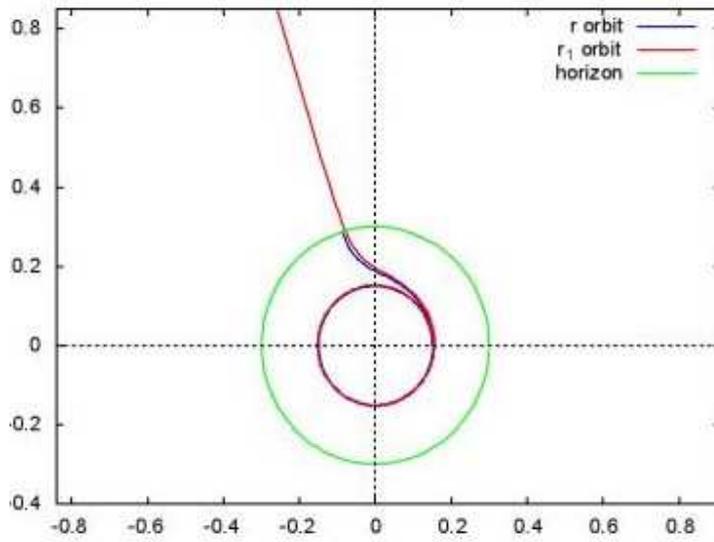


Figura 11: Órbitas que colapsan dentro del horizonte de evento.

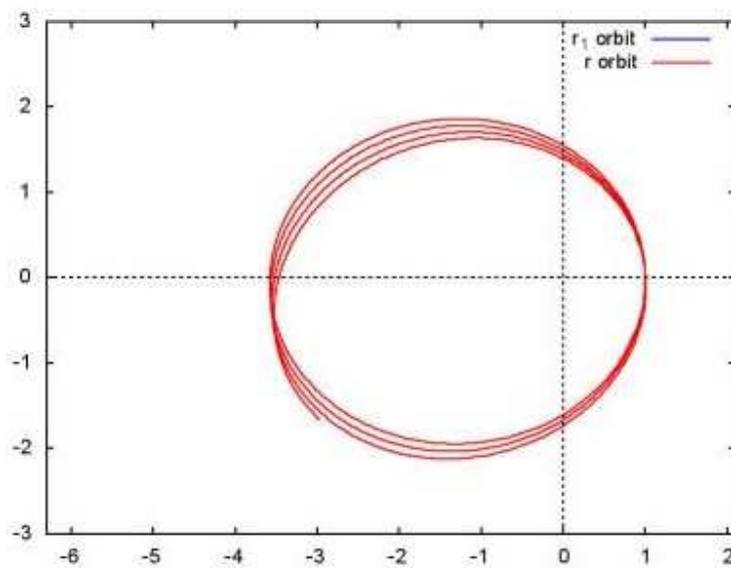


Figura 12: Órbita del conjunto de ecuaciones (60, 61) con precesión hacia adelante.

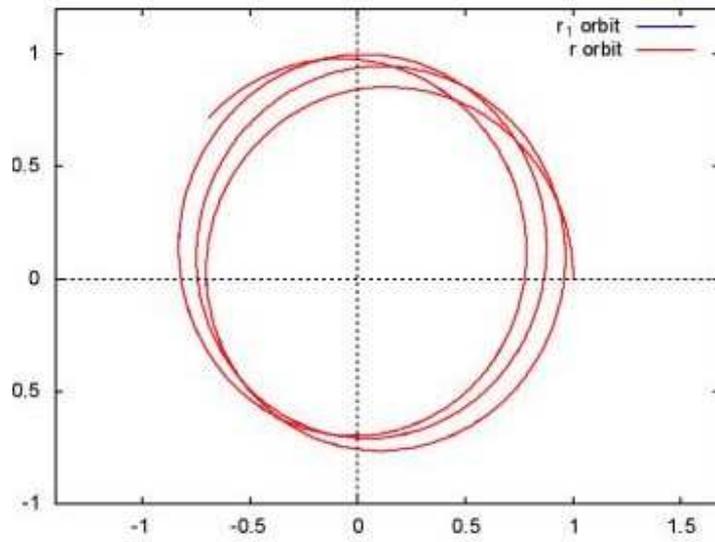


Figura 13: Órbita del conjunto de ecuaciones (60, 61) con precesión retrógrada.

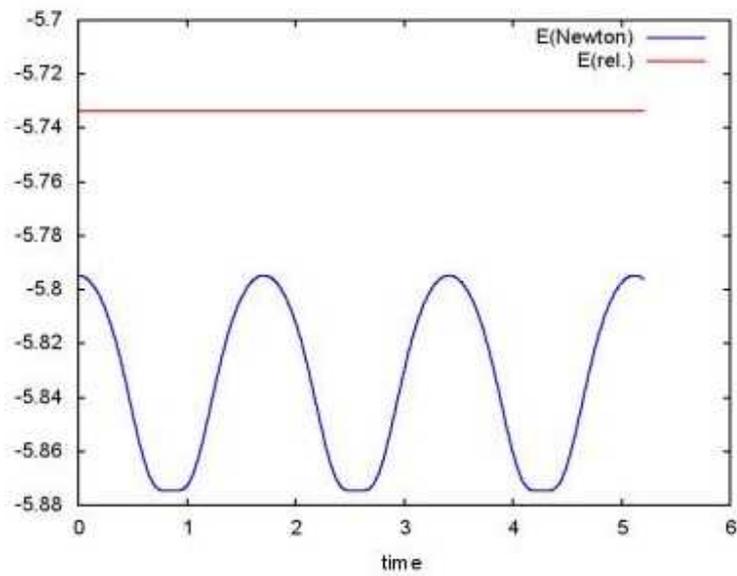


Figura 14: Energía total de movimiento con precesión retrógrada.