La identidad de Bianchi de la geometría diferencial.

por

M.W. Evans y H. Eckardt

A.I.A.S. y U.P.I.T.E.C.

(www.aias.us y www.upitec.org)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se demuestra que la segunda ecuación de Bianchi utilizada por Einstein y Hilbert está incompleta, de manera que la cosmología basada en dicha ecuación también lo está. Gran cantidad de nueva información puede obtenerse mediante la deducción de la verdadera segunda identidad de Bianchi de la geometría diferencial, a partir de la primera identidad de Bianchi de Cartan. Cuando esto se lleva a cabo, se observa que la cosmología basada en la ecuación de campo de Einstein Hilbert constituye un caso especial muy limitado, en el que la torsión no está presente. Utilizando la verdadera identidad de Bianchi, es posible desarrollar la cosmología íntegramente en términos de torsión, de una manera más sencilla y obteniendo más información.

Palabras clave: Segunda identidad de Bianchi de la geometría diferencial, cosmología basada en la torsión, teoría ECE.

1. Introducción.

Recientemente, se ha desarrollado una teoría del campo unificado covariante generalizada [1–12], directamente a partir de geometría diferencial tradicional [13], utilizando las ecuaciones estructurales de Cartan y las ecuaciones de Bianchi [14]. Esta teoría se desarrolló con el objeto de sugerir una estructura geométrica lógica para una teoría de campo unificado de la filosofía natural. Esta es, sin duda, la filosofía sobre la que se basa la teoría de la relatividad, la cual afirma que la geometría constituye la base de la filosofía natural. La teoría se conoce como la teoría de campo de Einstein–Cartan–Evans (ECE), porque intenta completar la conocida obra de Einstein y de Cartan. En la Sección 2 se demuestra que es posible deducir una nueva identidad de la geometría diferencial, a partir de la primera identidad de Bianchi de la geometría diferencial dada por Cartan. Se demuestra que las verdaderas primera y segunda identidades de Bianchi se relacionan entre sí, y que ambas relacionan la curvatura con la torsión. La tradicional segunda identidad de Bianchi, tal como la utilizaron Einstein y Hilbert [15] para deducir su célebre ecuación de campo, constituye un caso especial limitado de la verdadera identidad de Bianchi. De manera que la cosmología y la relatividad contemporáneas también son casos especiales de aquello que es posible. Esta conclusión se ilustra mediante la teoría ECE, en la que los campos fundamentales de la física se unifican mediante el empleo de la torsión para representar al campo electromagnético. También se ha demostrado que la torsión es importante [1–12] en un contexto puramente gravitacional, y es responsable, por ejemplo, de la formación de galaxias en espiral. En la Sección 3 se sugiere una nueva ecuación de campo para la cosmología, utilizando el novedoso concepto de las formas de Noether para representar la densidad de momento y energía canónica. En contraste con el tradicional tensor de Noether de la ecuación de Einstein Hilbert, un tensor simétrico, las formas de Noether son antisimétricas en sus últimos dos índices y se hacen proporcionales a la forma de torsión. Este procedimiento simplifica marcadamente, y también extiende, la ecuación de campo de Einstein y Hilbert.

2. Deducción de la verdadera segunda identidad de Bianchi.

La primera identidad de Bianchi, tal como fue dada por Cartan [13] es:

$$D \wedge T^a = d \wedge T^a + \omega^a_{\ b} \wedge T^b := R^a_{\ b} \wedge q^b \qquad (1)$$

donde, en notación convencional, T^a es la forma de torsión, $\omega^a{}_b$ es la conexión de espín, $R^a{}_b$ es la curvatura o forma de Riemann, y q^b es la forma de la tétrada. En notación tensorial [1–13], la Ec. (1) deviene:

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} \\
&\quad + \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} \\
&\quad + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} \\
&:= R^\lambda_{\ \rho\mu\nu} + R^\lambda_{\ \mu\nu\rho} + R^\lambda_{\ \nu\rho\mu}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

donde $\Gamma^\lambda_{\ \nu\rho}$ es la conexión gamma, y $R^\lambda_{\ \rho\mu\nu}$ es el tensor de Riemann. La Ec. (2) muestra que la primera identidad de Bianchi de Cartan es una identidad verdadera, e identifica la suma cíclica de tres tensores de Riemann con una suma cíclica de tres definiciones del tensor de Riemann. De manera que el lado derecho es idénticamente igual al lado izquierdo, tal como lo requiere una verdadera identidad. Nótese cuidadosamente que la Ec. (2) se cumple para cualquier tipo de conexión gamma, no sólo para la conexión de Christoffel. La notación de forma diferencial es mucho más concisa y elegante que la notación tensorial, pero ambas contienen la misma información. Implícito en ambas ecuaciones (1) y (2) se encuentra un tensor de torsión distinto de cero [1–13]:

$$T^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \neq 0. \tag{3}$$

Esto desaparece para la conexión simétrica de Christoffel:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu}. \tag{4}$$

La primera ecuación de Bianchi, utilizada por Einstein y Hilbert, y en cosmología convencional, es

$$R^a_{\ b} \wedge q^b = 0 \tag{5}$$

y ésta no es una identidad porque se cumple si y sólo si la métrica es simétrica, es decir para una conexión de Christoffel. La Ec. (5) a menudo se conoce, erróneamente, como "la primera identidad de Bianchi", pero no constituye una verdadera identidad. De hecho fue descubierta [13] por Ricci y Levi Civita, y no por Bianchi. En notación tensorial, la Ec. (5) es:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \tag{6}$$

donde

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\kappa} R^{\kappa}_{\ \sigma\mu\nu} \tag{7}$$

es el tensor de Riemann con los índices descendidos. Aquí

$$g_{\rho\kappa} = g_{\kappa\rho} \tag{8}$$

es la métrica simétrica. Nótese que la Ec. (5) y (6) implican una torsión que desaparece:

$$T^{\kappa}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} = 0. \tag{9}$$

En coordenadas normales de Riemann [13] la Ec. (6) es:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\gamma\beta\delta} &= \frac{1}{2}\big(\partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\beta \partial_\delta g_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\gamma} \\ &\quad + \partial_\gamma \partial_\delta g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\delta g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma \partial_\beta g_{\alpha\delta} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\gamma\delta} \\ &\quad + \partial_\delta \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\beta g_{\delta\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\delta\beta} \big) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

y se observa que esto no se cumple si la métrica no es simétrica, y tampoco se cumple si la conexión no es una conexión de Christoffel. Para la conexión general, la verdadera primera identidad de Bianchi es la Ec. (1) ó la Ec. (2), y la Ec. (1) es la ecuación de campo de la electrodinámica clásica en la teoría ECE [1-12].

Una segunda ecuación de Bianchi de la geometría de Cartan se incluye en la referencia [13] como:

$$D \wedge R^{a}_{\ b} = 0 \tag{11}$$

pero éste es un caso especial [13] cuando la torsión es igual a cero (en el caso de Einstein Hilbert). En notación tensorial, la Ec. (11) es:

$$D_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + D_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + D_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0 \tag{12}$$

y siempre se le conoce como "la segunda identidad de Bianchi" en la cosmología convencional. De hecho no es una identidad. Esto se demuestra [13] expandiéndola en coordenadas normales de Riemann:

$$\begin{aligned} & D_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + D_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + D_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\partial_\lambda\partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\lambda\partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\lambda\partial_\nu\partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial_\lambda\partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma} \\ &\quad + \partial_\rho\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\lambda} - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\rho\partial_\nu\partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\rho\partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\lambda} \\ &\quad + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\rho g_{\lambda\mu} + \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\rho}\Big) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Se observa, por comparación de los términos en líneas de puntos de la ecuación anterior, que se obtiene un resultado igual a cero si y solamente si:

$$g_{\rho\nu} = g_{\nu\rho} \tag{14}$$

donde se ha utilizado la conmutación de 4-derivadas parciales:

$$\partial_\lambda\partial_\mu\partial_\sigma = \partial_\mu\partial_\sigma\partial_\lambda , \tag{15}$$

$$\partial_\mu\partial_\sigma\partial_\lambda = \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\lambda . \tag{16}$$

La Ec. (14) se cumple si y solamente si la conexión es la de Christoffel:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{17}$$

y si y solamente si desaparece el tensor de torsión:

$$T^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} = 0. \tag{18}$$

La Ec.(12) puede re-expresarse utilizando contracción de índices [13] como:

$$D^\mu G_{\nu\mu} = 0 \tag{19}$$

donde $G_{\nu\mu}$ es el tensor de Einstein:

$$G_{\nu\mu} = R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} R g_{\nu\mu}. \tag{20}$$

Aquí, $R_{\nu\mu}$ es el tensor simétrico de Ricci [13] y R es la curvatura escalar convencional de la cosmología [13]. Se obtiene la ecuación de campo de Einstein Hilbert al hacer la Ec. (19) proporcional al Teorema de Noether:

$$D^{\mu} T_{\nu\mu} = 0 \tag{21}$$

es decir

$$D^{\mu} G_{\nu\mu} = k D^{\mu} T_{\nu\mu} \tag{22}$$

y utilizando la solución

$$G_{\nu\mu} = k T_{\nu\mu} \tag{23}$$

que es la ecuación de Einstein Hilbert de 1915. Aquí,

$$T_{\nu\mu} = T_{\mu\nu} \tag{24}$$

es el tensor de momento – energía canónica simétrico de Noether, y la Ec. (21) denota conservación de energía – momento, como es bien sabido.

Se observa que la célebre ecuación de campo y la igualmente famosa "segunda identidad de Bianchi" se cumplen si y solamente si la conexión es simétrica, y si y solamente si el tensor de torsión es igual a cero. De lo contrario, ya no se cumplen, de manera que la cosmología convencional se ve severamente restringida por estas suposiciones [1–12].

La verdadera segunda identidad de Bianchi se obtiene si se toma la derivada D ∧ en ambos lados de la verdadera primera identidad de Bianchi (1). Así,

$$D \wedge (R^a{}_b \wedge q^b) := D \wedge (D \wedge T^a). \tag{25}$$

La regla general para la derivada exterior de una *n*-forma es [13]:

$$(d \wedge A)_{\mu_1 \cdots \mu_{\rho+1}} = (\rho+1)\, \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \cdots \mu_{\rho+1}]} \tag{26}$$

donde los [ ] denotan permutación antisimétrica [13] que se define como sigue:

$$T_{[\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n]} = \frac{1}{n!}\left(T_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} + \text{suma antisimétrica}\right). \tag{27}$$

permutaciones que son el resultado de que un número impar de intercambios reciban un signo negativo. Así:

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right) \tag{28}$$

y

$$T_{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{6}\left(T_{\mu\nu\rho} - T_{\mu\rho\nu} + T_{\rho\mu\nu} - T_{\nu\mu\rho} + T_{\nu\rho\mu} - T_{\rho\nu\mu}\right). \tag{29}$$

Si suponemos antisimetría en los últimos dos índices:

$$T_{\mu\nu\rho} = -T_{\mu\rho\nu} \text{ etc.} \tag{30}$$

entonces la Ec. (29) deviene:

$$T_{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{3}\left(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} + T_{\nu\rho\mu}\right). \tag{31}$$

Cuando hay cuatro índices, la regla de permutación es la misma que para los del tensor de rango cuatro de Levi–Civita:

0123=0312=0231=1
1203=1320=1032=1
2301=2013=2130=1

3102=3210=3021=1
0321=0213=0132=-1
1302=1023=1230=-1
2103=2310=2031=-1
3201=3012=3120=-1 (32)

De manera que, con

$\sigma = 0, \mu = 1, \nu = 2, \rho = 3$ (33)

y suponiendo antisimetría en los últimos dos índices, obtenemos:

$$T_{[\sigma\mu\nu\rho]} = \frac{1}{12}\left(T_{\sigma\mu\nu\rho} + T_{\sigma\rho\mu\nu} + T_{\sigma\nu\rho\mu} + T_{\mu\nu\sigma\rho} + T_{\mu\rho\nu\sigma} + T_{\mu\sigma\rho\nu} + T_{\nu\rho\sigma\mu} + T_{\nu\sigma\mu\rho} + T_{\nu\mu\rho\sigma} + T_{\rho\sigma\mu\nu} + T_{\rho\nu\mu\sigma} + T_{\rho\sigma\nu\mu}\right) \quad (34)$$

Así:

$$\begin{aligned}
(D\wedge R)_{\text{cíclico}} &:= D\wedge\left(R^a{}_b\wedge q^b\right) = D\wedge R^a_{\mu\nu\rho} + D\wedge R^a_{\nu\rho\mu} + D\wedge R^a_{\rho\mu\nu} \\
&= \frac{1}{12}\Big(\big(D_\sigma R^a_{\mu\nu\rho} + D_\sigma R^a_{\rho\mu\nu} + D_\sigma R^a_{\nu\rho\mu} + D_\mu R^a_{\nu\sigma\rho} + D_\mu R^a_{\rho\nu\sigma} + D_\mu R^a_{\sigma\rho\nu} \\
&\quad + D_\rho R^a_{\sigma\mu\nu} + D_\rho R^a_{\nu\sigma\mu} + D_\rho R^a_{\mu\nu\sigma} + D_\nu R^a_{\rho\sigma\mu} + D_\nu R^a_{\sigma\mu\rho} + D_\nu R^a_{\mu\rho\sigma}\big) \\
&\quad + \big(D_\sigma R^a_{\nu\rho\mu} + D_\sigma R^a_{\mu\nu\rho} + D_\sigma R^a_{\rho\mu\nu} + D_\nu R^a_{\rho\sigma\mu} + D_\nu R^a_{\mu\rho\sigma} + D_\nu R^a_{\sigma\mu\rho} \\
&\quad + D_\rho R^a_{\mu\sigma\nu} + D_\rho R^a_{\sigma\nu\mu} + D_\rho R^a_{\nu\mu\sigma} + D_\mu R^a_{\sigma\nu\rho} + D_\mu R^a_{\rho\sigma\nu} + D_\mu R^a_{\nu\rho\sigma}\big) \\
&\quad + \big(D_\sigma R^a_{\rho\mu\nu} + D_\sigma R^a_{\nu\rho\mu} + D_\sigma R^a_{\mu\nu\rho} + D_\rho R^a_{\mu\sigma\nu} + D_\rho R^a_{\nu\mu\sigma} + D_\rho R^a_{\sigma\nu\mu} \\
&\quad + D_\mu R^a_{\nu\sigma\rho} + D_\mu R^a_{\rho\nu\sigma} + D_\mu R^a_{\sigma\rho\nu} + D_\nu R^a_{\sigma\rho\mu} + D_\nu R^a_{\mu\sigma\rho} + D_\nu R^a_{\rho\mu\sigma}\big)\Big) \quad (35) \\
&= \frac{1}{4}\left(D_\sigma R^a_{\mu\nu\rho} + D_\sigma R^a_{\rho\mu\nu} + D_\sigma R^a_{\nu\rho\mu}\right) + \frac{1}{12}\big(D_\nu R^a_{\rho\sigma\mu} + D_\nu R^a_{\mu\rho\sigma} + D_\nu R^a_{\sigma\mu\rho} \\
&\quad + D_\rho R^a_{\mu\sigma\nu} + D_\rho R^a_{\sigma\nu\mu} + D_\rho R^a_{\nu\mu\rho} + D_\mu R_{a\,\nu\sigma\rho} + D_\mu R^a_{\rho\nu\sigma} + D_\mu R^a_{\sigma\rho\nu}\big)
\end{aligned}$$

que es una suma de términos antisimétrica que denotamos como $(D\wedge R)_{\text{cíclico}}$ en notación condensada definida por la Ec. (35). Análogamente:

$$
\begin{aligned}
(D(D\wedge T))_{\text{cíclico}} &:= D\wedge(D\wedge T^a) \\
&= \frac{1}{4}\left(D_\sigma D_\mu T^a_{\nu\rho} + D_\sigma D_\rho T^a_{\mu\nu} + D_\sigma D_\nu T^a_{\rho\mu}\right) \\
&\quad + \frac{1}{12}\left(D_\nu D_\rho T^a_{\sigma\mu} + D_\nu D_\mu T^a_{\rho\sigma} + D_\nu D_\sigma T^a_{\mu\rho} \right. \\
&\quad + D_\rho D_\mu T^a_{\sigma\nu} + D_\rho D_\sigma T^a_{\nu\mu} + D_\rho D_\nu T^a_{\mu\sigma} \\
&\quad \left. + D_\mu D_\nu T^a_{\sigma\rho} + D_\mu D_\rho T^a_{\nu\sigma} + D_\mu D_\sigma T^a_{\rho\nu}\right).
\end{aligned} \tag{36}
$$

El resultado completo es no trivial, y es la auténtica identidad de Bianchi. Este Teorema puede definirse como sigue. Si:

$$D\wedge T^a := R^a{}_b \wedge q^b \tag{37}$$

resulta idénticamente que:

$$(D\wedge R)_{\text{cíclico}} := (D(D\wedge T))_{\text{cíclico}} . \tag{38}$$

Las ecuaciones (37) y (38) denotan la verdadera segunda identidad de Bianchi. De manera que el conjunto completo de ecuaciones de Cartan es:

$$
\begin{aligned}
T &= D\wedge q , \\
R &= D\wedge \omega , \\
D\wedge T &:= R\wedge q , \\
(D\wedge R)_{\text{cíclico}} &:= (D(D\wedge T))_{\text{cíclico}}
\end{aligned} \tag{39}
$$

La teoría de campo de Einstein–Hilbert es el caso especial:

$$R\wedge q = 0 \tag{40}$$

$$D\wedge R = 0 \tag{41}$$

y omite una gran cantidad de información básica. Se observa que hay sólo una verdadera identidad de Bianchi, porque la Ec. (38) se obtuvo a partir de la Ec. (37).

3. Cosmología basada en la torsión.

A partir de lo anterior se sabe ahora que hay sólo una verdadera identidad de Bianchi:

$$D \wedge T^a := R^a{}_b \wedge q^b \tag{42}$$

porque esto implica la identidad:

$$(D \wedge R)_{cíclico} := (D(D \wedge T))_{cíclico} \tag{43}$$

En la deducción de su ecuación de campo de 1915, Einstein utilizó el caso especial:

$$R^a{}_b \wedge q^b = 0. \tag{44}$$

Utilizando la Ec. (37), es decir:

$$D \wedge (R^a{}_b \wedge q^b) = 0 \tag{45}$$

se observa que el caso especial (44) implica:

$$D \wedge R^a{}_b = 0 \tag{46}$$

que es la "segunda identidad de Bianchi". Se dedujo a partir de "la primera identidad de Bianchi" (44) y en consecuencia ambas identidades no son independientes entre sí. La ecuación de campo de Einstein de 1915 es, en notación diferencial:

$$D \wedge R^a{}_b = k D \wedge N^a{}_b \tag{47}$$

donde k es la constante de Einstein, y donde definimos $N^a{}_b$ como la forma de Noether. Esta última es una 2-forma valuada como tensor que representa la densidad de momento – energía canónica. La solución particular elegida por Einstein en 1915 es equivalente en notación de forma a:

$$R^a{}_b = k N^a{}_b . \quad (48)$$

Hay dos formas de Noether, relacionadas a través de la estructura de la Ec. (42), la verdadera identidad de Bianchi. Así:

$$D \wedge N^a := N^a{}_b \wedge q^b \quad (49)$$

donde

$$T^a = k N^a . \quad (50)$$

Aquí:

$$k = \frac{8\pi G}{c^2} = 1{,}86595 \times 10^{-26}\ \mathrm{m\,kg\,m^{-1}} \quad (51)$$

donde G es la constante de Newton. Así, $N^a{}_b$ posee las unidades de masa por unidad de volumen (densidad) y N^a posee las unidades de masa por unidad de área. La Ec. (49) es la generalización del Teorema de Noether para incluir densidad de momento – energía canónica tanto rotacional como traslacional. En el caso especial:

$$N^a{}_b \wedge q^b = 0 \quad (52)$$

entonces:

$$D \wedge N^a{}_b = 0 . \quad (53)$$

La Ec. (53) es equivalente [1–13] en notación tensorial a:

$$D^\mu N_{\nu\mu} = 0 \quad (54)$$

donde $N_{\nu l}$ es el conocido tensor de densidad de momento – energía canónico simétrico de Noether:

$$N_{\nu\mu} = N_{\mu\nu} . \tag{55}$$

Dado que se conserva el momento de energía TOTAL, la Ec. (49) describe la conservación e interacción de energía – momento rotacional y traslacional. La conocida Ec. (54) se cumple sólo en ausencia de energía–momento rotacional y es, una vez más, un caso especial. En general, tanto $N^a{}_b$ como N^a poseen una naturaleza roto-traslacional las ecuaciones de campo más generales del tipo de Einstein son las Ecs. (48) y (50), en las cuales puede haber interacción entre la torsión (rotación) y la curvatura (traslación). Estas consideraciones están completamente ausentes en la ecuación de campo de Einstein y en la cosmología establecida, la mayoría de cuyas conclusiones contemporáneas se basan en la muy restringida Ec. (53) y, en consecuencia, están incompletas en el mejor de los casos, y equivocadas en el peor de dichos casos. Conceptos tales como el *Big Bang* y la *materia oscura* son erróneos por varios motivos, en especial por la completa no inclusión de la torsión en la cosmología establecida, y también el tratamiento erróneo de las singularidades, tal como lo demuestra Crothers [1–12].

El verdadero teorema de Noether (49) puede desarrollarse como la ecuación covariante generalizada [1–13]:

$$d \wedge N^a = j^a = N^a{}_b \wedge q^b - \omega^a{}_b \wedge N^b . \tag{56}$$

Cuando no hay densidad de momento – energía torsional presente:

$$N^a = 0 \tag{57}$$

de manera que la Ec. (56) es:

$$N^a{}_b \wedge q^b = 0 . \tag{58}$$

Cuando el movimiento es puramente torsional (rotacional) se cumple la siguiente relación, una relación afín a la teoría de campo ECE [1–12]:

$$N^a{}_b \wedge q^b = \omega^a{}_b \wedge N^b , \tag{59}$$

En este caso $N^a{}_b$ es el dual de N^a :

$$N^a_{\ b} = -\frac{1}{2} \kappa \epsilon^a_{\ bc} N^c \tag{60}$$

donde k posee las unidades de metros a la inversa, o número de onda. De manera que para movimiento puramente rotacional o torsional, $N^a_{\ b}$ y N^a son, respectivamente, 2-formas con valor de tensor y de vector que denotan densidades de momento – energía rotacional. En este caso, la conservación de energía – momento viene dada por:

$$d \wedge N^a = 0. \tag{61}$$

Esta ecuación puede desarrollarse en notación vectorial como dos ecuaciones:

$$\nabla \cdot N^a(\text{espín}) = 0 \tag{62}$$

$$\nabla \times N^a(\text{orbital}) + \frac{1}{c} \frac{\partial N^a}{\partial t}(\text{espín}) = 0. \tag{63}$$

La primera es afín a la ley del magnetismo de Gauss, mientras que la segunda lo es con la ley de la inducción de Faraday. Estas ecuaciones relacionan densidades de energía – momento orbital *($N^a_{\ b}$)* y de espín *(N^a)*. De manera que este tipo de cosmología torsional, tal como se observa, por ejemplo, en una galaxia en espiral [1–12], puede desarrollarse íntegramente sin utilizar el tensor de Riemann, simplificando así en forma dramática las soluciones.

Referencias bibliográficas.

[1] M.W.Evans, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, Suffolk, 2005), vol. 1.

[2] M. W. Evans, ibid., vols. 2 y 3 (2006).

[3] M. W. Evans, ibid., vol. 4 (2007), documentos 55 a 70 en el portal www.aias.us .

[4] M. W. Evans, ibid., vol. 5 (2008), documentos 71 a 89 en el portal www.aias.us .

[5] M. W. Evans, ibid., vol. 6 (2009), en preparación.

[6] L. Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis Academic, Suffolk, 2007). Hay traducción al castellano por Alex Hill, publicada en el portal www.aias.us .

[7] H. Eckardt, L. Felker, S. Crothers, D. Indranu, K. Pendergast y G. J. Evans, artículos publicados en el portal www.aias.us ; F. Amador, artículo publicado en el portal

www.aias.us en preparación, también en la Sección Omnia Opera de este portal, con hipervínculos.

[8] M. W. Evans, *Acta Phys. Polonica* B, **38,** 2211 (2007); M. W. Evans y H. Eckardt, *Physica B*, en impresión (2007).

[9] M. W. Evans (ed.), "Modern Non-linear Optics", una publicación sobre un tema en especial, en tres partes, por I. Prigogine y S. A. Rice, "Advances in Chemical Physics" (Wiley Interscience, Nueva York, 2001), vols. 119(1) a 119(3) respaldado por la Academia Real Sueca; M. W. Evans y S. Kielich (eds.), ibid., vols. 85(1) a 85(3) (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, reimpreso en 1993 y 1997), Premio de Excelencia del Gobierno Polaco.

[10] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the $B^{(3)}$ Field" (World Scientific, 2001).

[11] M. W. Evans et al, *Found. Phys.* y *Found. Phys. Lett.*, 1994 al presente, ver Omnia Opera en el portal www.aias.us para un listado completo de algunos hipervínculos.

[12] M. W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, Dordrecht, 1994 a 2002, con encuadernación dura y blanda) en cinco volúmenes.

[13] S. P. Carroll, "Spacetime and Geometry : an Introduction to General Relativity" (Addison-Wesley, Nueva York, 2004, también sus notas de 1997 publicadas en la red).

[14] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory" (Cambridge Univ. Press, 1996, 2a ed.).

[15] A. Einstein, "The Meaning of Relativity" (Princeton Univ. Press , ediciones de 1921–1954).