El Origen Fundamental de la Curvatura y la Torsión.

por

Myron W. Evans,

Alpha Institute for Advanced Study, Civil List Scientist.

(emyrone@aol.com y www.aias.us)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se analiza el origen fundamental de la curvatura y la torsión en términos de conmutadores de derivadas covariantes en la variedad (*manifold*) general. Se incluyen demostraciones detalladas del origen de los tensores de curvatura y torsión. Se incluye una demostración de la identidad del operador de Jacobi, y se utiliza esta identidad para demostrar que la segunda identidad de Bianchi convencional se cumple si y solamente si la torsión es igual a cero, y si y solamente si se acompaña por una novedosa identidad de operador que no figura en la literatura. Finalmente, se utilizan consideraciones teóricas de grupo para demostrar que, en el caso de la rotación, es posible interpretar los tensores de Riemann y de torsión como constantes de estructura de grupos. A su vez, esta demostración conduce a la conclusión de que las ecuaciones de la electrodinámica clásica asumen la misma forma vectorial en las teorías de campo de Einstein, Cartan y Evans (ECE) y de Maxwell Heaviside, pero en diferentes variedades base.

Palabras clave: Curvatura, torsión, derivadas covariantes, identidad de Jacobi, identidad de Bianchi, origen rotacional de la torsión de Cartan, teoría de campo de Einstein Cartan Evans (ECE).

1. Introducción.

Recientemente se ha desarrollado [1-8] una teoría del campo unificado covariante generalizada en la que el sector electromagnético se representa mediante geometría de Cartan y en la que aparece la curvatura y la torsión. Esta teoría se conoce como la teoría de Einstein Cartan Evans (ECE) porque se basa en una extension de la geometría de Riemann utilizada por Einstein para que incluya la torsión de Cartan [9]. En la teoría ECE el campo electromagnético es directamente proporcional a la torsión de Cartan. Esta última se representa en geometría diferencial de Cartan mediante una dos-forma diferencial valuada vectorialmente definida por:

$$T^a = d \wedge q^a + \omega^a_b \wedge q^b \tag{1}$$

donde q_a es la tétrada de Cartan, una una-forma diferencial valuada vectorialmente [9], y donde ω_a es la conexión de espín. El índice a se define en un espacio-tiempo tangencial de Minkowski en un punto P en la variedad (manifold) base, una variedad que representa un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con torsión y curvatura. Utilizando el postulado de la tétrada [1–9]:

$$D_\mu q^a_\nu = 0 \tag{2}$$

la definición (1) se vuelve equivalente a la definición del tensor de torsión de Cartan en la variedad base:

$$T^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{3}$$

donde $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ es la conexión de la variedad base. En la geometría de Riemann utilizada por Einstein para desarrollar la relatividad general, la conexión es la de Christoffel:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{4}$$

1. Introducción.

Recientemente se ha desarrollado [1-8] una teoría del campo unificado covariante generalizada en la que el sector electromagnético se representa mediante geometría de Cartan y en la que aparece la curvatura y la torsión. Esta teoría se conoce como la teoría de Einstein Cartan Evans (ECE) porque se basa en una extension de la geometría de Riemann utilizada por Einstein para que incluya la torsión de Cartan [9]. En la teoría ECE el campo electromagnético es directamente proporcional a la torsión de Cartan. Esta última se representa en geometría diferencial de Cartan mediante una dos-forma diferencial valuada vectorialmente definida por:

$$T^a = d \wedge q^a + \omega^a_b \wedge q^b \tag{1}$$

donde q_a es la tétrada de Cartan, una una-forma diferencial valuada vectorialmente [9], y donde ω_a es la conexión de espín. El índice a se define en un espacio-tiempo tangencial de Minkowski en un punto P en la variedad (manifold) base, una variedad que representa un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con torsión y curvatura. Utilizando el postulado de la tétrada [1–9]:

$$D_\mu q^a_\nu = 0 \tag{2}$$

la definición (1) se vuelve equivalente a la definición del tensor de torsión de Cartan en la variedad base:

$$T^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{3}$$

donde $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ es la conexión de la variedad base. En la geometría de Riemann utilizada por Einstein para desarrollar la relatividad general, la conexión es la de Christoffel:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \tag{4}$$

de manera que en la relatividad general einsteiniana y en cosmología la torsión es igual a cero. En la teoría ECE, el potencial y el campo electromagnéticos son directamente proporcionales, respectivamente, a las formas de la tétrada y de torsión:

$$A^a_\mu = A^{(0)} q^a_\mu \tag{5}$$

$$F^a_{\mu\nu} = A^{(0)} T^a_{\mu\nu} \tag{6}$$

Por lo tanto, en la variedad base, el campo electromagnético deviene un tensor de rango tres proporcional al tensor de torsión:

$$F^\kappa_{\mu\nu} = A^{(0)} T^\kappa_{\mu\nu} \tag{7}$$

Se ha demostrado [1–8] que la definición (7) conduce a las ecuaciones de la electrodinámica clásica en la misma notación vectorial que la teoría vectorial de Maxwell Heaviside, pero expresada en una variedad base con torsión y curvatura, no en el espacio-tiempo de Minkowski. Los components cartesianos del campo eléctrico y magnético en la teoría ECE se definen mediante elementos en el tensor de torsión de rango tres como sigue:

$$\left.\begin{aligned} E_X &= E^1_{01}, & B_X &= B^1_{23}, \\ E_Y &= E^2_{02}, & B_Y &= B^2_{31}, \\ E_Z &= E^3_{03}, & B_Z &= B^3_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

En este documento se incluye una demostración fundamental adicional de la Ec.(8) utilizando la definición fundamental [9] del tensor de Riemann y del tensor de torsión en términos de conmutadores de derivadas covariantes (o de viaje redondo en la variedad base). La obtención del tensor de Riemann y del tensor de torsión (3) utilizando este método se incluye en detalle en la Sección 2. En la Sección 3 se incluye la demostración de la identidad de Jacobi. La identidad de Jacobi [9–10] es exacta y resulta válida tanto para derivadas covariantes como para generadores de grupos [10]. En esta sección se utiliza la identidad de Jacobi para demostrar bajo qué circunstancias es válida la segunda identidad de Bianchi [9]. Esto es importante porque la segunda identidad de Bianchi se utiliza directamente en la obtención de la ecuación de campo de Einstein Hilbert (EH). Se descubre que la segunda identidad de Bianchi y la ecuación de campo EH son válidas si y solamente si el tensor de torsión de Cartan (3) es igual a cero, y si y solamente si:

$$R^{\rho}_{\ \sigma\mu\nu} D_{\kappa} + R^{\rho}_{\ \sigma\kappa\mu} D_{\nu} + R^{\rho}_{\ \sigma\nu\kappa} D_{\mu} = 0 ,$$
$$R^{a}_{\ b} \wedge D = 0 , \tag{9}$$

que es una nueva relación de operador diferencial que parece haber pasado desapercibido en la literatura. En la Ec. (9), $R^{a}_{\ b}$ es la curvatura o forma diferencial de Riemann [1–9] y D representa la derivada covariante en geometría diferencial. La segunda identidad de Bianchi convencional habitualmente se expresa como la inversa de la Ec. (9):

$$D \wedge R^{a}_{\ b} = 0. \tag{10}$$

En presencia de la forma de torsión, sin embargo, la identidad de Bianchi rigurosamente correcta es [1–9]:

$$D \wedge T^{a} := R^{a}_{\ b} \wedge q^{b} \tag{11}$$

y hay solamente una identidad de Bianchi (ver el documento UFT88 en el portal www.aias.us). La segunda puede obtenerse a partir de la Ec. (11).

Finalmente en la Sección 4, se considera el límite rotacional de la geometría de Cartan utilizando el método del viaje redondo, y se demuestra que en este límite puede considerarse al tensor de torsión de Cartan (3) como una constante de estructura de grupo. Estas consideraciones conducen directamente a la interpretación (8) de las componentes eléctrica y magnética en la teoría ECE (ver documentos 93 y sigs en en el portal www.aias.us).

2. Deducción de los Tensores de Curvatura y Torsión a partir de Conmutadores de Derivadas Covariantes.

Aún cuando esta demostración es conocida, suele darse en los libros de texto [9] sin suficiente detalle como para ser comprendida por no especialistas. Brinda una interpretación fundamental, tanto para la curvatura como para la torsión, en términos de un viaje redondo en la variedad base general. Este método también se emplea en teoría de campo [10] y de esta manera los tensores de curvatura, torsión y de campo poseen el mismo origen fundamental. Por lo tanto, ésta es una justificación fundamental para la hipótesis básica de la teoría ECE, la cual afirma que el tensor de campo electromagnético es directamente proporcional a la torsión de Cartan, pues ambos son conmutadores de derivadas covariantes. El origen tanto del tensor de Riemann como del tensor de torsión de Cartan es transporte paralelo alrededor de un ciclo cerrado:

$$\delta V^\rho = (\delta a)(\delta b) A^\nu B^\mu R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} V^\sigma \tag{12}$$

que puede representarse por un conmutador de derivadas covariantes [9–10]. La derivada covariante de un tensor en una dirección dada mide [9] cuánto cambia el tensor con respecto a lo que hubiese sido si se hubiese visto sometido a transporte paralelo. El conmutador de derivadas covariantes mide la diferencia entre el transporte en forma paralela del tensor en una dirección y luego en la otra, versus el orden contrario. En un espacio-tiempo plano o de Minkowski el resultado es igual a cero, pues no existe diferencia en el sentido en el que se efectúe el proceso. En el espacio-tiempo plano las derivadas covariantes se vuelven derivadas ordinarias, de manera que el siguiente operador es igual a cero:

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu = 0. \tag{13}$$

Sin embargo, el conmutador de derivadas covariantes es un operador distinto de cero:

$$[D_\mu, D_\nu] \neq 0. \tag{14}$$

Tales conmutadores son bien conocidos en la teoría de generadores de rotación, momento angular, teoría de grupos y mecánica cuántica [10]. También aparecen en geometría diferencial como el producto cuña [1–9] de dos una-formas, que se define mediante:

$$A^a \wedge B^b = [A^a_\mu, A^b_\nu] \tag{15}$$

Los tensores de Riemann y de torsión se definen [9] mediante:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = D_\mu (D_\nu V^\rho) - D_\nu (D_\mu V^\rho) \tag{16}$$

donde V^ρ es un cuatro-vector en una variedad base con curvatura y torsión. En el lado derecho de la Ec.(16) las derivadas covariantes actúan sobre tensores de rango dos contenidos dentro de los corchetes. La regla [1–9] para la derivada covariante de un tensor de rango dos da, entonces:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] V^\rho = {} & \partial_\mu (D_\nu V^\rho) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} D_\nu V^\sigma \\ & - \partial_\nu (D_\mu V^\rho) + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} D_\lambda V^\rho - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} D_\mu V^\sigma \end{aligned} \tag{17}$$

dentro de lo cual están definidos:

$$\left. \begin{aligned} D_\nu V^\rho &= \partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} V^\lambda, \\ D_\lambda V^\rho &= \partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma, \\ D_\nu V^\sigma &= \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda, \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Por lo tanto, hay ecuaciones tales como:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (D_\nu V^\rho) &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\lambda}) V^\lambda + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \partial_\mu V^\lambda \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma . \end{aligned} \tag{19}$$

Los índices ficticios o de suma ahora se reordenan como sigue:

$$\lambda \longrightarrow \sigma \tag{20}$$

Esto da:

$$
\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] = {} & \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma \\
& - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma \\
& + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda \\
& - \partial_\nu \partial_\mu V^\rho - (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma}) V^\sigma - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma \\
& + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma \\
& - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda
\end{aligned} \tag{21}
$$

que puede reordenarse para dar:

$$
\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] V^\rho = {} & (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) V^\sigma \\
& - (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})(\partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\rho).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Finalmente esto se expresa como:

$$
[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho \tag{23}
$$

donde el tensor de Riemann se define [9] mediante:

$$
R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{24}
$$

y el tensor de torsión se define mediante:

$$
T^\lambda_{\mu\nu} = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}). \tag{25}
$$

El resultado global:

$$
[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho \tag{26}
$$

se cumple irrespectivamente de la simetría de la métrica y de la conexión, e irrespectivamente de la condición de compatibilidad de la métrica [9]. El empleo del conmutador de derivadas covariantes significa que los tensores de Riemann y de torsión son siempre antisimétricos en sus últimos dos índices:

$$R^{\rho}_{\ \sigma\mu\nu} = -R^{\rho}_{\ \sigma\nu\mu}, \quad T^{\lambda}_{\ \mu\nu} = -T^{\lambda}_{\ \nu\mu} \tag{27}$$

indicando su origen rotacional o conmutativo o antisimétrico. Tanto la curvatura como la torsión son formas de rotación, o inclinación o giro. Sin embargo, es importante notar que no existe restricción de simetría en los primeros dos índices del tensor de Riemann en general. El tensor de Riemann es antisimétrico en sus primeros dos índices si y solamente si se utiliza la condición de compatibilidad métrica [9]. Si se supone que la métrica es simétrica:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} . \tag{28}$$

se deduce a partir de compatibilidad métrica [9] que la conexión es simétrica:

$$\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\mu} \tag{29}$$

y que la torsión desaparece. En la geometría de Cartan [1–9], la torsión en general no es igual a cero, de manera que la métrica y la conexión no son en general simétricas. La primera identidad de Bianchi convencional se cumple si y solamente si la métrica y la conexión son simétricas, y si y solamente si la torsión es igual a cero. En notación de forma diferencial la primera identidad de Bianchi en ausencia de torsión es:

$$R^{a}_{\ b} \wedge q^{b} = 0 \tag{30}$$

y en notación tensorial es:

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} + R_{\sigma\rho\mu\nu} + R_{\sigma\nu\rho\mu} = 0 . \tag{31}$$

Sin embargo, es importante notar que las Ecs. (30) y (31) constituyen casos especiales. La primera identidad de Bianchi rigurosamente correcta es [1–9]:

$$D \wedge T^{a} := R^{a}_{\ b} \wedge q^{b} \tag{32}$$

distinta de cero en general, y la segunda identidad de Bianchi rigurosamente correcta es una nueva expresión de la Ec. (32), y no una identidad independiente (documento UFT88 en el portal www.aias.us). Historicamente, la primera identidad de Bianchi fue desarrollada por Ricci y Levi-Civita, no por Bianchi.

En el espacio-tiempo de Minkowski:

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \tag{33}$$

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = T^\lambda{}_{\mu\nu} = 0, \tag{34}$$

y éste es el espacio-tiempo de la teoría de campo de Maxwell Heaviside.

Los tensores de Riemann y de torsión se construyen a partir de la conexiones y se cumplen para cualquier conexión, sea la misma compatible con la métrica o no. Aun cuando la conexión no sea tensorial, los tensores de Riemann y de torsión son tensores verdaderos por construcción [1–9] y todas las ecuaciones de la geometría de Riemann y Cartan son covariantes generalizadas, es decir tensoriales bajo la transformación general de coordenadas. Esto significa que las ecuaciones de la física basadas en estas geometrías, tales como la teoría ECE [1–8], son ecuaciones de la física rigurosamente objetivas, pues poseen la misma forma para un observador que se mueve arbitrariamente con respecto a otro, en un marco de referencia que se mueve arbitrariamente con respecto a otro marco de referencia. Esto constituye la esencia de la filosofía esencialmente geométrica de la relatividad general, como es bien sabido [9]. La esencia de la cuestión es que la física es geometría, toda la física es geometría, no solamente la gravitación. De lo contrario no contamos con una filosofía básica de la física que tenga consistencia interna. La teoría de campo de Maxwell Heaviside (MH) no cumple con esta filosofía, porque la teoría de campo MH está definida en el espacio-tiempo de Minkowski, y la teoría de MH es covariante según Lorentz por construcción. No contiene conexiones y no es covariante generalizada. Para un tensor de cualquier rango [9]:

$$\begin{aligned}[D_\rho, D_\sigma] X^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = & -T^\lambda{}_{\rho\sigma} D_\lambda X^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} + R^{\mu_1}{}_{\lambda\rho\sigma} X^{\lambda\mu_2 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} + R^{\mu_2}{}_{\lambda\rho\sigma} X^{\mu_1\lambda \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} + \ldots \\ & - R^\lambda{}_{\nu_1\rho\sigma} X^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\lambda\nu_2 \ldots \nu_l} + R^\lambda{}_{\nu_2\rho\sigma} X^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1\lambda \ldots \nu_l} - \ldots\end{aligned} \tag{35}$$

el conmutador de dos campos vectoriales X e Y es un tercer campo vectorial [9] con componentes:

$$[X,Y]^{\mu} = X^{\lambda}\partial_{\lambda}Y^{\mu} - Y^{\lambda}\partial_{\lambda}X^{\mu}. \tag{36}$$

Los tensores de curvatura y torsión pueden pensarse como mapas multi-lineales [9], siendo la torsión un mapa a partir de dos campos vectoriales para un tercero:

$$T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y] \tag{37}$$

y la curvatura como un mapa a partir de tres campos vectoriales hacia un cuarto [9]:

$$R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z \tag{38}$$

donde:

$$D_X = X^{\mu} D_{\mu}. \tag{39}$$

La geometría de Cartan [1–9] expresa estos resultados de una manera elegante y concisa, a través de sus dos conocidas ecuaciones estructurales [9]:

$$T^a = D \wedge q^a, \tag{40}$$

$$R^a_b = D \wedge \omega^a_b. \tag{41}$$

6.3 Las Identidades de Jacobi y Bianchi.

La identidad de Jacobi [1–10] es una identidad exacta utilizada en teoría de campo y relatividad general. Es una identidad de operador que aplica tanto a derivadas covariantes [9] como a generadores de grupos [10]. Sin embargo, rara vez se demuestra con todos los detalles, de manera que a continuación se incluye una demostración detallada. Es necesario demostrar que:

$$[[D_\lambda, D_\rho], D_\sigma] + [[D_\rho, D_\sigma], D_\lambda] + [[D_\sigma, D_\lambda], D_\rho] := 0 \tag{42}$$

que es la identidad de Jacobi, una identidad exacta. La demostración expande los conmutadores como sigue

$$\begin{aligned} \text{Lado Izq.} = &(D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) D_\sigma - D_\sigma (D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \\ &+ (D_\rho D_\sigma - D_\sigma D_\rho) D_\lambda - D_\lambda (D_\rho D_\sigma - D_\sigma D_\rho) \\ &+ (D_\sigma D_\lambda - D_\lambda D_\sigma) D_\rho - D_\rho (D_\sigma D_\lambda - D_\lambda D_\sigma) \end{aligned} \tag{43}$$

y se considera a esta expansión como una expansión de álgebra:

$$\begin{aligned} \text{Lado Izq.} = &D_\lambda D_\rho D_\sigma - D_\rho D_\lambda D_\sigma - D_\sigma D_\lambda D_\rho + D_\sigma D_\rho D_\lambda \\ &+ D_\rho D_\sigma D_\lambda - D_\sigma D_\rho D_\lambda - D_\lambda D_\rho D_\sigma + D_\lambda D_\sigma D_\rho \\ &+ D_\sigma D_\lambda D_\rho - D_\lambda D_\sigma D_\rho - D_\rho D_\sigma D_\lambda + D_\rho D_\lambda D_\sigma := 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Q.E.D.

En teoría de campo [10] la identidad de Jacobi se utiliza para definer ecuaciones de campo, y el conmutador de derivadas covariantes define el campo a través de una constante

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig\, G_{\mu\nu}. \tag{45}$$

La idea de derivada covariante en teoría de campo se toma prestada de la relatividad general [10] y en notación condensada en teoría de campo existen conmutadores tales como:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\mu] \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) \end{aligned} \tag{46}$$

que se han desarrollado ampliamente en teorías precursoras de la teoría ECE, tales como la electrodinámica O(3) (véase la sección de Omnia Opera en el portal www.aias.us entre 1992 y 2003). En la ecuación eq. (3.173) del libro de Ryder [10], por ejemplo, aparece una ecuación de campo:

$$D_\rho G_{\mu\nu} + D_\mu G_{\nu\rho} + D_\nu G_{\rho\mu} = 0 \tag{47}$$

que, en notación de geometría diferencial [1–9], es:

$$D \wedge G = 0. \tag{48}$$

La Ec. (48) es similar a la identidad de Bianchi de la geometría diferencial, que deviene la ecuación de campo homogénea de la teoría ECE [1–8]:

$$D \wedge F^a = A^{(0)} (R^a{}_b \wedge q^b) \tag{49}$$

ó

$$d \wedge F^a = A^{(0)} (R^a{}_b \wedge q^b - \omega^a{}_b \wedge T^b). \tag{50}$$

Resulta claro que tanto la ecuación de campo de Ryder (48) como la ecuación de campo de la teoría ECE (49) comparten un origen común en el conmutador de derivadas covariantes, pero la teoría ECE se desarrolla en una variedad más general que el tipo de teoría de campo utilizada por Ryder [10]. Está última se ve restringida solamente a la variedad de Minkowski.

Restringiendo la consideración de la Ec. (26) al caso libre de torsión, ella deviene:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \tag{51}$$

la cual puede expandirse como:

$$[D_\mu, D_\nu] V^0 = R^0_{\ 0\mu\nu} V^0 + R^0_{\ 1\mu\nu} V^1 + R^0_{\ 2\mu\nu} V^2 + R^0_{\ 3\mu\nu} V^3$$
$$[D_\mu, D_\nu] V^1 = R^1_{\ 0\mu\nu} V^0 + R^1_{\ 1\mu\nu} V^1 + R^1_{\ 2\mu\nu} V^2 + R^1_{\ 3\mu\nu} V^3$$
$$[D_\mu, D_\nu] V^2 = R^2_{\ 0\mu\nu} V^0 + R^2_{\ 1\mu\nu} V^1 + R^2_{\ 2\mu\nu} V^2 + R^2_{\ 3\mu\nu} V^3 \tag{52}$$
$$[D_\mu, D_\nu] V^3 = R^3_{\ 0\mu\nu} V^0 + R^3_{\ 1\mu\nu} V^1 + R^3_{\ 2\mu\nu} V^2 + R^3_{\ 3\mu\nu} V^3$$

En el caso libre de torsión, los siguientes elementos del tensor de Riemann desaparecen:

$$R^0_{\ 0\mu\nu} = R^1_{\ 1\mu\nu} = R^2_{\ 2\mu\nu} = R^3_{\ 3\mu\nu} = 0 \tag{53}$$

porque [9] en este caso:

$$R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} = -R^\sigma_{\ \rho\mu\nu} \tag{54}$$

Por lo tanto

$$[D_\mu, D_\nu] \begin{bmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R^0_{\ 1} & R^0_{\ 2} & R^0_{\ 3} \\ -R^0_{\ 1} & 0 & R^1_{\ 2} & R^1_{\ 3} \\ -R^0_{\ 2} & -R^1_{\ 2} & 0 & R^2_{\ 3} \\ -R^0_{\ 3} & -R^1_{\ 3} & -R^2_{\ 3} & 0 \end{bmatrix}_{\mu\nu} \begin{bmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{bmatrix} \tag{55}$$

y es posible definir una ecuación de operador similar a la Ec. (45) de la teoría de campo:

$$[D_\mu, D_\nu] = R_{\mu\nu} := \begin{bmatrix} 0 & R^0_{\ 1\mu\nu} & R^0_{\ 2\mu\nu} & R^0_{\ 3\mu\nu} \\ -R^0_{\ 1\mu\nu} & 0 & R^1_{\ 2\mu\nu} & R^1_{\ 3\mu\nu} \\ -R^0_{\ 2\mu\nu} & -R^1_{\ 2\mu\nu} & 0 & R^2_{\ 3\mu\nu} \\ -R^0_{\ 3\mu\nu} & -R^1_{\ 3\mu\nu} & -R^2_{\ 3\mu\nu} & 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

que ilustra la relación entre la teoría de campo y la relatividad general. La denominada convencionalmente como segunda identidad de Bianchi [9] puede obtenerse a partir de la Ec. (51) como sigue:

$$
\begin{aligned}
([D_\kappa,[D_\mu,D_\nu]])V^\rho &= (D_\kappa[D_\mu,D_\nu]-[D_\mu,D_\nu]D_\kappa)V^\rho \\
&= D_\kappa(D_\mu(D_\nu V^\rho)-D_\nu(D_\mu V^\rho))-D_\mu D_\nu(D_\kappa V^\rho) \\
&\quad +D_\nu D_\mu(D_\kappa V^\rho) \\
&= D_\kappa([D_\mu,D_\nu]V^\rho)-[D_\mu,D_\nu](D_\kappa V^\rho) \\
&= (D_\kappa[D_\mu,D_\nu])V^\rho+[D_\mu,D_\nu]D_\kappa V^\rho-[D_\mu,D_\nu]D_\kappa V^\rho
\end{aligned}
\tag{57}
$$

utilizando el Teorema de Leibnitz. Por lo tanto:

$$
([D_\kappa,[D_\mu,D_\nu]])V^\rho=(D_\kappa[D_\mu,D_\nu])V^\rho \tag{58}
$$

Por lo tanto, la identidad de Jacobi deviene en este caso:

$$
(D_\kappa[D_\mu,D_\nu]+D_\nu[D_\kappa,D_\mu]+D_\mu[D_\nu,D_\kappa])V^\rho=0 \tag{59}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
D_\kappa(R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma-T^\lambda{}_{\mu\nu}D_\lambda V^\rho)+D_\nu(R^\rho{}_{\sigma\kappa\mu}V^\sigma-T^\lambda{}_{\kappa\mu}D_\lambda V^\rho) \\
+D_\mu(R^\rho{}_{\sigma\nu\kappa}V^\sigma-T^\lambda{}_{\nu\kappa}D_\lambda V^\rho)=0.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

La segunda identidad de Bianchi convencional constituye un caso especial de esta ecuación cuando desaparece la torsión, de manera que:

$$
D_\kappa(R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma)+D_\nu(R^\rho{}_{\sigma\kappa\mu}V^\sigma)+D_\mu(R^\rho{}_{\sigma\nu\kappa}V^\sigma)=0. \tag{61}
$$

Utilizando el Teorema de Leibnitz:

$$D_\kappa (R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma) = (D_\kappa R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}) V^\sigma + R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} D_\kappa V^\sigma \tag{62}$$

y se observa que la segunda identidad de Bianchi:

$$D_\kappa R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + D_\nu R^\rho{}_{\sigma\kappa\mu} + D_\mu R^\rho{}_{\sigma\nu\kappa} = 0 \tag{63}$$

se cumple si y solamente si la siguiente identidad de operador también se cumple:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} D_\kappa + R^\rho{}_{\sigma\kappa\mu} D_\nu + R^\rho{}_{\sigma\nu\kappa} D_\mu = 0. \tag{64}$$

En notación diferencial la Ec. (64) es [1–9]:

$$R^a{}_b \wedge D = 0 \tag{65}$$

y la Ec. (63) es:

$$D \wedge R^a{}_b = 0. \tag{66}$$

Por lo tanto las dos ecuaciones (65) y (4) restringen estrictamente la validez de la relatividad general de Einstein Hilbert y la cosmología.

6.4 Límite puramente rotacional.

En trabajos previos [1–8] se ha considerado el límite puramente rotacional de la teoría ECE como definido por la dualidad de $R^a{}_b$ y T^a en el espacio-tiempo tangente de Minkowski:

$$R^a_{\ b} = -\frac{\kappa}{2} \epsilon^a_{\ bd} T^d. \tag{67}$$

En esta sección se considera al límite puramente rotacional como el caso especial a partir de la Ec. (26) donde:

$$R^\rho_{\ \sigma\mu\nu} V^\rho = -T^\lambda_{\ \mu\nu} D_\lambda V^\rho \tag{68}$$

que es similar a la Ec. (67) pero expresada en la variedad base. Con la Ec. (26), la Ec. (68) deviene una ecuación de tipo generador de rotación:

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = -2 T^\lambda_{\ \mu\nu} D_\lambda V^\rho \tag{69}$$

dando la ecuación de operador:

$$[D_\mu, D_\nu] = -2 T^\lambda_{\ \mu\nu} D_\lambda \tag{70}$$

en la que las derivadas covariantes cumplen con la identidad de Jacobi (42). Las derivadas covariantes que aparecen en la Ec. (70) pueden también considerarse como generadores de grupos [9–10]. Por ejemplo, los grupos generadores de SO(3) cumplen con:

$$[I_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k \tag{71}$$

donde la constante estructural de grupo [10] es:

$$C_{ijk} = i \epsilon_{ijk} \tag{72}$$

y:

$$C_{lim} C_{mjk} + C_{ljm} C_{mki} + C_{lkm} C_{mij} = 0. \tag{73}$$

La constante estructural de grupo se define mediante la representación adjunta [10]

$$C_{imn} = \left(I_i \right)_{mn} \tag{74}$$

donde:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{75}$$

Existe una clara similitud entre las Ecs. (70) y (71), excepto que la Ec. (70) se expresa en la variedad general mientras que la Ec. (71) es euclidiana. Por lo tanto, es posible considerer al tensor de torsión en la Ec. (70) como una constante estructural de grupo en la variedad general. Los generadores del grupo son las derivadas covariantes en la variedad general. Llevando la analogía un poco más lejos, el grupo SU(3) [10] se define mediante las matrices de Gell-Mann que cumplen la relación de conmutador:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}. \tag{76}$$

La constante estructural de grupo en este caso se define mediante [10] if_{abc} .

Por lo tanto, se deduce que si la Ec. (70) se considera como de natualeza rotacional, análoga a las Ecs. (71) ó (76), los valores posibles de $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ son los totalmente antisimétricos $T^1{}_{23}$, $T^2{}_{31}$ y $T^3{}_{12}$. Estos son de tipo espacial y desempeñan un papel análogo a ε_{123} , ε_{231} y ε_{312} en el espacio-tiempo euclidiano. Si se mantienen constantes los índices superiores y se efectúan los duales de Hodge en los dos índices inferiores, se obtiene $T^1{}_{01}$, $T^2{}_{02}$ y $T^3{}_{03}$. En la teoría ECE [1–8] definen los componentes de los campos eléctrico y magnético del sector electromagnético covariante generalizado (Ecs. (8) y (50)). En el caso de rotación pura, las ecuaciones electrodinámicas de la teoría ECE en notación vectorial son los valores en el espacio libre:

$$
\left.\begin{aligned}
\underline{\nabla}\cdot\underline{B} &= 0 \\
\underline{\nabla}\times\underline{E} + \partial\underline{B}/\partial t &= \underline{0} \\
\underline{\nabla}\cdot\underline{E} &= 0 \\
\underline{\nabla}\times\underline{B} - \frac{1}{c^2}\partial\underline{E}/\partial t &= \underline{0}.
\end{aligned}\right\} \tag{77}
$$

De una manera más general en el laboratorio, y para todo propósito práctico, devienen [1–8] las conocidas leyes vectoriales:

$$
\left.\begin{aligned}
\underline{\nabla}\cdot\underline{B} &= 0 \\
\underline{\nabla}\times\underline{E} + \partial\underline{B}/\partial t &= \underline{0} \\
\underline{\nabla}\cdot\underline{E} &= \rho/\epsilon_0 \\
\underline{\nabla}\times\underline{B} - \frac{1}{c^2}\partial\underline{E}/\partial t &= \mu_0\underline{J}
\end{aligned}\right\} \tag{78}
$$

pero ahora expresadas en la variedad general.

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al personal técnico de AIAS y muchos otros por discusiones interesanes.

Referencias bibliográficas.

[1] M. W. Evans, "Generally Covariant Unified Field Theory" (Abramis Academic, Suffolk, 2005 en adelante), volúmenes uno a cuatro. Volumen Cinco en prep. (Documentos 71–93 en el portal www.aias.us).

[2] L .Felker, "The Evans Equations of Unified Field Theory" (Abramis Academic, Suffolk, 2007). Hay traducción al idioma castellano por Alex Hill, de libre acceso, en el portal www.aias.us .

[3] K. Pendergast, "Mercury as Crystal Spheres" (preimpresión en el portal www.aias.us , una introducción a la teoría ECE y recopilación histórica, Abramis Academic, en prep).

[4] M. W. Evans et al. Sección de Omnia opera en el portal www.aias.us (1992 a 2003).

[5] M. W. Evans y L. B. Crowell, "Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field" (World Scientific, 2001).

[6] M. W. Evans, (ed.), "Modern Non-linear Optics", una publicación especial por tema, en tres partes por I. Prigogine y S. A. Rice (eds. de la serie), "Advances in Chemical Physics" (Wiley Interscience, Nueva York, 2001, segunda edición), vols. 119(1) a 119(3), ibid. primera edición, ed. M. W. Evans y S. Kielich, (Wiley Interscience, 1992, 1993, y 1997), vols. 85(1) a 85(3).

[7] M. W. Evans y J.-P. Vigier, "The Enigmatic Photon" (Kluwer, 1994 a 2002, con encuadernación dura o blanda), en cinco volúmenes.

[8] M.W. Evans, Physica B,182, 227, 237 (1992).

[9] S. P. Carroll, "Space-time and Geometry: an Introduction to Geneal Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004).

[10] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory" (Cambridge Univ. Press, 1996, 2a Ed.).