DEMOSTRACIÓN DE LA COVARIANCIA SEGÚN LORENTZ DEL TEOREMA CÍCLICO B.

Traducción: Ing. Alex Hill (www.et3m.net)

Al igual que en S.P. Carroll, "Spacetime and Geometry: Introduction to General Relativity" (Addison Wesley, Nueva York, 2004), definimos el campo vectorial completo mediante:

$$V = V^{\mu}\, e_{\mu'} = V^{\nu'}\, e_{\nu'} \tag{1}$$

donde V^{μ} denota sus componentes y donde e_{μ} denota sus elementos base. La Ec. (1) muestra que el campo vectorial completo es invariante bajo la transformación general de coordenadas. Por ejemplo, considerando un "boost"[1] de Lorentz en el eje X , se establece el vector de la columna dos:

$$V^{\mu} = \begin{pmatrix} c\,t \\ \\ X \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde c es la velocidad de la luz y t es el tiempo. Los ejes X e Y permanecen iguales, de manera que sólo debemos de considerar la Ec. (2). El campo vectorial es:

$$\underline{V} = c\,t\,\underline{e_0} + X\,\underline{i} \tag{3}$$

en notación vectorial. Los componentes son ct y X, y los elementos base son los vectores unitarios $\underline{e_0}$ y $\underline{i}$. La última forma parte del sistema cartesiano $\underline{i}$, $\underline{j}$ y $\underline{k}$, en tanto que la anterior es el vector unitario temporal en un espaciotiempo de cuatro dimensiones. De manera que hay cuatro vectores unitarios en cuatro dimensiones. La invariancia de la Ec. (1) (notación tensorial) se traduce en la siguiente notación vectorial:

$$\underline{V} = \underline{V}' = (c\,t)'\,\underline{e_0}' + X'\,\underline{i}' \tag{4}$$

La transformación de Lorentz está descrita en libros de texto tales como J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics"(Wiley, 3ª Edición, 1999). Consideremos el marco de referencia K´ moviéndose a una velocidad v en dirección de los valores positivos de Z con respecto al marco K. La velocidad de la luz en un vacío, c , se postula como igual en ambos marcos de referencia. En el marco K:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = c^2t^2 \tag{5}$$

y en el marco K´:

[1] N. del T.: Suele denominarse ***boost*** a la transformación de coordenadas espaciotemporales, aun en castellano.

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = c^2 t'^2 \tag{6}$$

Lorentz postuló que:

$$c^2 t'^2 - (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \lambda^2 (c^2 t^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)) \tag{7}$$

y puede demostrarse que, para todo valor de v:

$$\lambda = 1 \tag{8}$$

Utilizando la notación:

$$X_0 = c\,\mathrm{t} \quad , \quad X_1 = X \quad , \quad X_2 = \mathrm{Y} \quad , \quad X_3 = \mathrm{Z} \tag{9}$$

Resulta a partir de la Ec. (7) que,

$$\left.\begin{aligned} X_0' &= \gamma\,(X_0 - \beta X_1) \\ X_1' &= \gamma\,(X_1 - \beta X_0) \\ X_2' &= X_2 \\ X_3' &= X_3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

donde

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-½} \tag{11}$$

Finalmente, parametrizando de la siguiente manera:

$$\beta = \tanh\varphi \quad , \quad \gamma = \cosh\varphi \quad , \quad \gamma\,\beta = \mathrm{senh}\,\varphi \tag{12}$$

La matriz del "boost" de Lorentz según el eje X es entonces:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\mathrm{senh}\,\varphi \\ -\mathrm{senh}\,\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \tag{13}$$

La matriz inversa del "boost" de Lorentz se escribe como Λ^{-1} y se define como:

$$\Lambda\,\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

De manera que:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \operatorname{senh}\varphi \\ & \\ \operatorname{senh}\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \tag{15}$$

Los componentes de V se transforman bajo la transformación de Lorentz como:

$$\begin{pmatrix} c\,t' \\ \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\operatorname{senh}\varphi \\ & \\ -\operatorname{senh}\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \tag{16}$$

Es decir:

$$c\,t' = c\,t\cosh\varphi - X\operatorname{senh}\varphi \tag{17}$$

$$X' = -c\,t\operatorname{senh}\varphi + X\cosh\varphi \tag{18}$$

Los vectores unitarios se transforman bajo la transformación inversa de Lorentz como:

$$\begin{pmatrix} \underline{e_0}' \\ \\ \underline{i}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \operatorname{senh} \varphi \\ \\ \operatorname{senh} \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \qquad (19)$$

es decir:

$$\underline{e_0}' = \underline{e_0} \cosh \varphi + \underline{i}' \operatorname{senh} \varphi \qquad (20)$$

$$\underline{i}' = \underline{e_0} \operatorname{senh} \varphi + \underline{i}' \cosh \varphi \qquad (21)$$

Ambos componentes y vectores unitarios se transforman de un modo covariante según la Ec. (1) y (4).

El campo vectorial completo permanece constante. Podemos demostrar esta constancia de la siguiente manera. Tenemos:

$$\underline{V} = c\, t\, \underline{e_0} + X\, \underline{i} \qquad (22)$$

$$\underline{V}' = (c\, t)'\, \underline{e_0}' + X'\, \underline{i}' \qquad (23)$$

La Ec.(23) es:

$$\underline{V}' = (c\, t \cosh \varphi - X \operatorname{senh} \varphi)\, (\underline{e_0} \cosh \varphi + \underline{i}' \operatorname{senh} \varphi)$$

$$+ (X \cosh \varphi - c\, t \operatorname{senh} \varphi)(\underline{e_0} \operatorname{senh} \varphi + \underline{i}' \cosh \varphi)$$

$$= c\, t \underline{e_0} (\cosh^2 \varphi - \operatorname{senh}^2 \varphi) + X\, \underline{i} (\cosh^2 \varphi - \operatorname{senh}^2 \varphi)$$

$$= c\, t \underline{e_0} + X\, \underline{i} = \underline{V} \qquad (24)$$

Q.E.D. (quod erat demonstrandum, aquello que deseábamos demostrar).

Aplicación al Teorema Cíclico B:

La base circular compleja se define como:

$$\left.\begin{aligned} \underline{e}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\,\underline{\mathrm{i}} - i\,\underline{\mathrm{j}}) \\ \underline{e}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\,\underline{\mathrm{i}} + i\,\underline{\mathrm{j}}) \\ \underline{e}^{(3)} &= \underline{\mathrm{k}} \\ \underline{e}^{(0)} &= \underline{e_0} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Es un conjunto de bases fundamental, tan fundamental como el conjunto de bases cartesianas. Los vectores unitarios espaciales están relacionados en forma cíclica:

$$\left.\begin{aligned} \underline{e}^{(1)} \times \underline{e}^{(2)} &= i\,\underline{e}^{(3)*} \\ \underline{e}^{(3)} \times \underline{e}^{(1)} &= i\,\underline{e}^{(2)*} \\ \underline{e}^{(2)} \times \underline{e}^{(3)} &= i\,\underline{e}^{(1)*} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

donde el asterisco * denota “complejo conjugado”. Análogamente, los vectores unitarios cartesianos también están relacionados cíclicamente:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\mathrm{i}} \times \underline{\mathrm{j}} &= \underline{\mathrm{k}} \\ \underline{\mathrm{k}} \times \underline{\mathrm{i}} &= \underline{\mathrm{j}} \\ \underline{\mathrm{j}} \times \underline{\mathrm{k}} &= \underline{\mathrm{i}} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

El Teorema Cíclico B viene dado en la Omnia Opera de este portal y es:

$$\left.\begin{aligned} \underline{B}^{(1)} \times \underline{B}^{(2)} &= i\,\underline{B}^{(0)}\,\underline{B}^{(3)*} \\ \underline{B}^{(3)} \times \underline{B}^{(1)} &= i\,\underline{B}^{(0)}\,\underline{B}^{(2)*} \\ \underline{B}^{(2)} \times \underline{B}^{(3)} &= i\,\underline{B}^{(0)}\,\underline{B}^{(1)*} \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Donde las densidades de flujo magnético vienen definidas como:

$$\underline{B}^{(1)} = \underline{B}^{(0)}\underline{e}^{(1)}\,\underline{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,, \qquad \underline{B}^{(2)} = \underline{B}^{(0)}\underline{e}^{(2)}\,\underline{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\,, \qquad \underline{B}^{(3)} = \underline{B}^{(0)}\underline{e}^{(3)} \qquad (29)$$

Aquí, φ es la fase electromagnética. De manera que el Teorema Cíclico B es la relación (26) entre los elementos base de la base compleja circular. Estos elementos base son covariantes según Lorentz por definición, de manera que el Teorema Cíclico B es covariante según Lorentz, Q.E.D.

Análogamente, el Teorema Cíclico B es covariante generalizado.